Curso de reforzamiento y regularización

MATEMÁTICAS III

Tercer grado

TELEsecundaria

Curso de reforzamiento y regularización. Matemáticas III. Tercer grado. Telesecundaria estuvo a cargo de la Dirección General de Materiales Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica, Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública
Alonso Lujambio Irazábal

Subsecretaría de Educación Básica
José Fernando González Sánchez

Dirección General de Materiales Educativos
María Edith Bernáldez Reyes

Coordinación general
María Cristina Martínez Mercado
Gabriel Calderón López

Autores
Ángel Daniel Ávila Mujica

Revisión técnico-pedagógica
José Alfredo Rutz Machorro
Laura Elizabeth Valdovinos de la Cruz
Diego Miguel Grande Avilés

Coordinación editorial
Dirección Editorial/DGME

Cuidado editorial
José Agustín Escamilla Viveros

Formación
Julio César Olivares Ramírez

Primera edición, 2011

Impreso en México

Presentación

En el marco del Fortalecimiento de la Telesecundaria y como resultado de las diferentes Reuniones Nacionales, es necesario brindar estrategias e instrumentos que permitan a los estudiantes de Telesecundaria apropiarse de los contenidos conceptuales de manera que comprendan mejor la dinámica natural y social en la que están inmersos, al mismo tiempo que cuenten con estrategias para ser actores activos y participativos en su realidad local y nacional, y así tengan, finalmente, referentes valorales que les permitan tomar decisiones responsables e informadas en su quehacer cotidiano, tanto dentro como fuera de la escuela.

Por lo anterior se presenta el *Curso de reforzamiento y regularización. Matemáticas III. Tercer grado.* Telesecundaria, que pretende reforzar desde diferentes estrategias aquellos conceptos que han resultado difíciles para los alumnos en su curso regular y que buscan acortar la distancia entre éstos y los estudiantes que tienen un mejor desempeño académico.

Este libro presenta variados recursos didácticos, lo que permite que existan más opciones para acercar el conocimiento a los alumnos.

El material se basa en los materiales del curso regular, adecuados bajo la lógica de que no sean materiales nuevos que impliquen un esfuerzo extra para entender su dinámica, buscan ser un puente entre lo que vieron durante el ciclo escolar con aquellos contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales que han representado alguna dificultad para su adecuada apropiación.

Consideramos que con la ayuda del docente, pieza fundamental en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, se facilitará el uso más amable de este material para reforzar y fortalecer las competencias de los estudiantes de Telesecundaria y se elevarán los índices de aprovechamiento, lo que, esperamos, redunde en un mejor rendimiento escolar.

Esperamos que el esfuerzo hecho por la Secretaría de Educación Pública se refleje en un material útil y práctico para los estudiantes y los docentes, y que éstos lo vean como un apoyo en el mejoramiento de su aprendizaje.

Conoce tu libro

La presente obra está estructurada en diferentes secciones que tienen como objetivo el manejo ordenado de la información de acuerdo con los temas que aparecen en el Programa de estudio 2006 de Matemáticas III y las necesidades de su desarrollo en el salón de clases.

El contenido de este libro consta de cinco secuencias correspondientes a cada bloque que conforma el curso de Matemáticas III.

Cada secuencia está dividida en varias sesiones en las que aparecen los temas que se ha definido como los de mayor dificultad para su comprensión y por tal motivo se han desarrollado con un lenguaje accesible y acompañado de apoyos gráficos que faciliten su entendimiento.

Al inicio de cada sesión se presenta su propósito; allí se anuncian los aprendizajes esperados o las habilidades matemáticas que han de adquirirse o ejercitarse durante su desarrollo.

La sección “Para empezar” te introduce y ubica en el contexto que te proporciona elementos para emprender las actividades que la sesión presenta.

“Manos a la obra” es el apartado que ofrece información y ejemplos que propician la reflexión y toma de decisiones sobre los conceptos matemáticos en turno.

La sección “Ejercicios” tiene variados problemas cuyo propósito es reforzar los conocimientos adquiridos y poner en práctica las habilidades desarrolladas durante la sesión.

Índice

SESIÓN 1. El cuadrado de la suma de dos números

Propósito

Aprenderás a obtener el producto notable de la suma de dos números elevada al **cuadrado:** $(x + y)^2$, **es decir** $(x + y)\ (x + y)$.

Para empezar

El procedimiento que se usa para obtener el resultado es representar al binomio al cuadrado como una multiplicación de un binomio por sí mismo:

$$(x + y)^2 = (x + y)\ (x + y)$$

Después hay que multiplicar cada uno de los términos del primer binomio por cada uno de los del segundo binomio:

$$(x+y)\ (x+y) = x^2 + xy + xy + y^2$$

Al sumar los términos $+ xy + xy$ el resultado es $+2xy$, por lo que el resultado final es:

$$x^2 + 2xy + y^2$$

Esta expresión recibe el nombre de trinomio cuadrado perfecto. Lo que puede leerse como:

> El *cuadrado* del primer término **más** el *doble* producto de ambos términos **más** el *cuadrado* del segundo término.

Manos a la obra

Apliquemos el procedimiento y veamos cómo se obtiene el producto notable:

$$a \text{ y } b$$

El *cuadrado* de la *suma* de los términos $(a + b)^2$, es igual a:

a) El *cuadrado* del primer término: $(a)(a)$:

$$a^2$$

b) Más el *doble* producto de ambos términos: $(a)(+b)$:

$$+2ab$$

c) Más el cuadrado del segundo término:

$$+ b^2$$

$\therefore$ **(Por lo tanto)**

El trinomio cuadrado perfecto es:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Otro ejemplo:

I. $(3x + 6)^2$

El cuadrado de la suma de los términos $3x$ y 6, es igual a:

a) El cuadrado del primer término:

$$(3x)(3x) = 9x^2$$

b) Más el doble del producto de ambos términos:

$$2(3x)(6) = 2(18x) = 36x$$

c) Más el cuadrado del segundo término:

$$(6)(6) = 6^2 = 36$$

El trinomio cuadrado perfecto es:

$$(3x + 6)^2 = 9x^2 + 36x + 36$$

II. Completa el siguiente procedimiento para poder obtener el trinomio cuadrado perfecto:

$$(5x + 8y)^2$$

El cuadrado de la suma de los términos _____ y _____ , es igual a:

a) El *cuadrado* del primer término:

(_____)(_____) = ____

b) Más el *doble* del producto de ambos términos:

2(_____) (_____) = 2(__________) = ______________

c) Más el *cuadrado* del segundo término:

(______)(______) = ______________

$\therefore$

El trinomio cuadrado perfecto es:

(______ + ______)^2 = __________________ + __________________ + __________________

III. Ahora obtén los trinomios cuadrados perfectos de los siguientes binomios elevados al cuadrado.

a) $(5x + 15)^2 =$ ____

b) $(9c + 9d)^2 =$ ____

c) $(4x + 6y)^2 =$ ____

d) $(4a + 2b)^2 =$ ____

e) $(6x + 3y)^2 =$ ____

SESIÓN 2. El cuadrado de la diferencia de dos números

Propósito

Aprenderás a obtener los productos notables de la sustracción de un binomio elevado a la segunda potencia: $(a - b)^2$

Para empezar

El procedimiento general que utilizaremos en esta ocasión para obtener el *trinomio cuadrado perfecto del cuadrado de la diferencia de dos términos* es similar al que viste en la sesión anterior: cada miembro de un binomio se multiplica por los dos miembros del otro:

$$(x - y)^2 = (x - y)\ (x - y)$$

$$(x - y)\ (x - y) = x^2 - xy - xy + y^2$$

Al sumar los términos $- xy - xy$ el resultado es $- 2xy$, por lo que el resultado final es:

$$x^2 - 2xy + y^2$$

Lo que puede leerse como El *cuadrado* del primer término **menos** el *doble* producto de ambos términos **más** el *cuadrado* del segundo término.

Manos a la obra

Apliquemos la descripción del resultado anterior y veamos cómo se obtiene el producto notable:

$$(a - b)^2$$

El cuadrado de la *diferencia* de los términos $(a - b)^2$, es igual a:

a) El *cuadrado* del primer término

$$a^2$$

b) Menos el *doble* producto de ambos términos

$$- 2ab$$

c) Más el *cuadrado* del segundo término

$$+ b^2$$

$\therefore$ (Por lo tanto)

El trinomio cuadrado perfecto es:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo:

I. $(9x - 4)^2$

El cuadrado de la *diferencia* de los términos $9x$ y 4, es igual a:

a) El *cuadrado* del primer término:

$$(9x)(9x) = 81x^2$$

b) Menos el *doble* del producto de ambos términos:

$$2(9x)(-4) = 2(-36x) = -72x$$

c) Más el *cuadrado* del segundo término:

$$(4)(4) = 4^2 = 16$$

$$\therefore$$

El trinomio cuadrado perfecto es:

$$(9x - 4)^2 = 81x^2 - 72x + 16$$

II. Completa el procedimiento para obtener el trinomio cuadrado perfecto de:

$$(7x - 20y)^2$$

a) El *cuadrado* del primer término:

(_____)(_____) = _________

b) Menos el *doble* del producto de ambos términos:

2(_____)(_____) = 2(___________) = ___________________

c) El *cuadrado* del segundo término es:

(_____)(_____) = ________________

$$\therefore$$

El trinomio cuadrado perfecto es:

(_____ – _____)² = __________________ – __________________ + _________________

Una representación del procedimiento anterior es la siguiente:

x se eleva al cuadrado

y se eleva al cuadrado

$$(x - y)^2 = x^2 - 2yx + y^2$$

El producto de (x) y ($-y$) se duplica

IV. Realiza los siguientes ejercicios y obtén el trinomio cuadrado perfecto:

a) $(6x - 3)^2 =$ ______________________________

b) $(12c - 8)^2 =$ ______________________________

c) $(5r - 6)^2 =$ ______________________________

d) $(7a - 4b)^2 =$ ______________________________

e) $(6x - 3y)^2 =$ ______________________________

f) $(ab^2 - 5m^3)^2 =$ ______________________________

SESIÓN 3. El producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos

Propósito

Aprenderás a obtener el producto notable de la **suma** de dos términos por la *diferencia* de éstos, también nombrados *binomios conjugados*.

Para empezar

Dos binomios que sólo difieren en el signo de uno de sus términos se llaman *binomios conjugados,* por ejemplo, $x + 3$ es el binomio conjugado de $x - 3$. Otro ejemplo es: $2x + 6$, que es el binomio conjugado de $-2x + 6$.

La suma de dos términos multiplicada por su diferencia se expresa como sigue:

$$(x + y)\,(x - y)$$

El resultado que se obtiene al multiplicar estos binomios es:

El cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término. Esta expresión recibe el nombre de diferencia de cuadrados.

Manos a la obra

Veamos cómo se obtiene el producto notable de:

$$(x + y)\,(x - y)$$

Se debe multiplicar cada término del primer binomio por cada término del segundo, tal como lo señalan las líneas en el esquema siguiente:

$$(x + y)\;(x - y) = x^2 + xy - xy + y^2$$

Al sumar los términos $-xy + xy$ el resultado es cero, es decir se eliminan por lo que el resultado definitivo es:

$$x^2 - y^2$$

Aprecia que es una diferencia de cuadrados. Ejemplos:

I. $(3x + 4y)\,(3x - 4y)$

El producto de estos binomios conjugados $(3x + 4y)\,(3x - 4y)$ es igual a:

a) El *cuadrado* del primer término:

$$(3x)(3x) = 9x^2$$

b) Menos el *cuadrado* del segundo término

$$(4y)(-4y) = -16y^2$$

Ð

c) El producto de $3x$ y $-4y$ es igual a $-12xy$ y el producto de $3x$ y $4y$ es $12xy$, al sumarlos el resultado es cero, por lo que el resultado de los binomios conjugados es:

$$9x^2 - 16y^2$$

II. $(17a + 20b^2c)\ (17a - 20b^2c)$

La *suma* de dos términos *multiplicada* por su *diferencia:*

$(17a + 20b^2c)\ (17a - 20b^2c)$ es igual a:

a) El *cuadrado* del primer término:

$$(17a)(17a) = 289a^2$$

b) Menos el *cuadrado* del segundo término:

$$(20b^2c)(20b^2c) = 400b^4c^2$$

c) El producto de $17a$ y $20b^2c$ es igual a $340ab^2c$ y el producto de $17a$ y $-20b^2c$ es igual a $-340ab^2c$ y al sumarlos se obtiene 0, por lo que se obtiene $-\ 400b^4c^2$

$$\therefore$$

La diferencia de cuadrados es $289a^2$

III. Completa el siguiente procedimiento para poder obtener *la diferencia de cuadrados:*

$$(5c^2 + 6d^2)\ (5c^2 - 6d^2)$$

La *suma* de dos términos *multiplicada* por su *diferencia:*

$(5c^2 + 6d^2)\ (5c^2 - 6d^2)$ es igual a:

a) El *cuadrado* del primer término:

(_____)(_____) = __________

b) Menos el *cuadrado* del segundo término:

(_____) (_____) = _________

$$\therefore$$

La diferencia de cuadrados es:

(_____ + _____) (_____ – _____) = ________ – ________

IV. Ahora obtén *la diferencia de cuadrados* de los siguientes productos de *binomios conjugados.*

a) $(4x + 6y)\ (4x - 6y) =$ ____________________

b) $(5a + 3b^2)\ (5a - 3b^2) =$ ____________________

c) $(a^2 + 8f^3)\ (a^2 - 8f^3) =$ ____________________

V. Realiza los siguientes ejercicios y obtén la *diferencia de cuadrados* de los siguientes productos de *binomios conjugados:*

a) $(5x + 3)\ (5x - 3) =$ ____________________

b) $(9c + 8)\ (9c - 8) =$ ____________________

c) $(4r + 6^3)\ (4r - 6^3) =$ ____________________

d) $(4a + 7b)\ (4a - 7b) =$ ____________________

e) $(6x + 3y)\ (6x - 3y) =$ ____________________

SESIÓN 4. El producto de dos binomios que tienen un término en común

Propósito

Aprenderás a obtener el producto notable del producto de dos binomios que tienen un término en común.

Para empezar

$(x + 5)(x + 2)$ es la multiplicación de un par de binomios que tienen un término común: la x. Como en los casos que se han visto en las sesiones anteriores, hay que multiplicar cada término de un binomio por cada término del otro:

$$(x + 5)\ (x + 2) = x^2 + 2x + 7x + 10$$

El resultado puede leerse como:

> El *cuadrado* del término común **más** la *suma* de los términos no comunes *multiplicados* por el término común **más** el *producto* de los términos no comunes.

Manos a la obra

Apliquemos el procedimiento y veamos cómo se obtiene el producto notable de manera resumida:

I. El producto de dos binomios que tienen un término en común $(x + 4)\ (x + 8)$ es igual a:

a) El *cuadrado* del término común:

$$(x)(x) = x^2$$

b) Más la *suma* de los términos no comunes *multiplicada* por el término común:

$$(4 + 8)\ x = 12x$$

c) Más el *producto* de los términos no comunes.

$$(4)(8) = 32$$

$$\therefore$$

El producto de los binomios es:

$$x^2 + 12x + 32$$

II. Completa el siguiente procedimiento para poder obtener ***el producto de los binomios que tienen un término en común:***

El producto de dos binomios que tienen un término en común:

$(a + 6)\ (a + 7)$ es igual a:

a) El *cuadrado* del término común

$(\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_^2$

b) Más la *suma* de los términos no comunes *multiplicada* por el término común:

$(\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_)\ \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$

c) Más el *producto* de los términos no comunes:

$(\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_\_\_\_$

∴ **(Por lo tanto)**

El producto de los binomios es:

$\_\_\_\_\_\_^2 + \_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_$

III. Ahora obtén ***el producto*** **de los siguientes** ***binomios*****.**

a) $(3x + 8)\ (3x + 9) =$ ______________________________

b) $(2a^2 + 12)\ (2a^2 + 6) =$ ______________________________

c) $(ab^2 + c^2)\ (ab^2 + d^2) =$ ______________________________

d) $(9b + 5)\ (9b + 7) =$ ______________________________

e) $(3e + 6)\ (3e + 47)=$ ______________________________

f) $(4d + 45)\ (4d + 2) =$ ______________________________

g) $(6z + 8)\ (6z + 23) =$ ______________________________

h) $(4x + 2^2)\ (4x + 5^3) =$ ______________________________

SESIÓN 5. Factorización de un trinomio

Propósito

Aprenderás y conocerás el procedimiento para factorizar un trinomio.

Para empezar

El término factorizar se utiliza cuando se deben encontrar dos o más factores que multiplicados entre sí, dan como resultado una expresión dada.
Para factorizar un *trinomio cuadrado perfecto* es necesario obtener la raíz cuadrada de los términos elevados al cuadrado:

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$\sqrt{a^2} = a \qquad\qquad \sqrt{b^2} = b$$

De esta manera se tienen los términos a y b como miembros del binomio al cuadrado:

$$(a + b)^2$$

Para comprobar el resultado se deben multiplicar estos términos entre sí y duplicarlos. Si el resultado es el término restante del trinomio, podremos reconocer al binomio al cuadrado que le dio origen al trinomio cuadrado perfecto:

$$2(a)\,(b) \;=\; 2ab$$

Por lo tanto:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

I. Ejercicio. Factoriza el siguiente trinomio cuadrado perfecto:

$$16a^2 + 72ac + 81c^2$$

$$+72ac$$

$$\sqrt{} = \qquad\qquad \sqrt{} =$$

Ahora multiplica entre sí los resultados de las raíces y multiplícalos por dos:

$$= \; 72\,ac$$

Si se ha cumplido la igualdad el binomio al cuadrado es:

$$(4a + 9c)^2$$

Manos a la obra

Utilicemos el procedimiento y obtengamos la factorización de un trinomio cuadrado perfecto:

II. $x^2 + 10x + 25$

a) La *raíz cuadrada* del primer término:

$$\sqrt{x^2} \text{ es igual a: } x$$

b) La *raíz cuadrada* del tercer término:

$$\sqrt{25} \text{ es igual a: } 5$$

c) El *doble* producto de las raíces:

$$2(x)\,(5) = 10x$$

$$\therefore$$

La factorización del trinomio cuadrado perfecto es:

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

Ahora **factoriza** los siguientes **trinomios cuadrados perfectos.**

a) $25x^2 + 120x + 144 =$ ______________________________

b) $16a^2 + 24ab + 9b^2 =$ ______________________________

c) $81x^4 + 54x^3 + 9x^2 =$ ______________________________

III. Hay trinomios que no tienen un par de términos con raíz cuadrada exacta, por ejemplo, $x^2 + 9x + 18$, en el que solamente x^2 tiene raíz cuadrada exacta y coeficiente 1. Para factorizar este tipo de trinomios se puede proceder como sigue:

a) Identificar el término elevado al cuadrado al cual hay que extraerle la raíz cuadrada y ésta es el término común de los binomios:

$$x^2 + 9x + 18 = (x + \quad)(x + \quad)$$

b) Los términos faltantes en los binomios con paréntesis son dos números que multiplicados resultan 18, por ejemplo:

$$(1)\,(18) = 18, \qquad (2)\,(9) = 18, \qquad (3)\,(6) = 18$$

c) Para saber cuál par de números forman los binomios se busca aquel cuya suma sea 9, pues el término $9x$ es el resultado de la suma de los dos monomios multiplicados por x:

$$= (x + \quad)\,(x + \quad)$$

En este caso los números buscados son 3 y 6.

d) La factorización de $x^2 + 9x + 18$ resulta: ______________________

$(x + 3)(x + 6)$

Ejercicio

Con el procedimiento anterior factoriza los siguientes *trinomios:*

a) $x^2 + 13x + 30$
b) $a^2 + 5a + 4$
c) $x^4 + 11x^2 + 24$

SESIÓN 6. Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas

Propósito

En esta sesión aprenderás a resolver ecuaciones no lineales utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

Para empezar

Resuelve el siguiente problema.

El cuadrado de un número, menos el doble de ese número más uno es igual a cero. ¿Cuál es el valor de ese número? ____________ ¿Cómo lo obtuviste? ____________________________

____

Compara tus respuestas con algunos compañeros y expliquen por qué plantearon esa ecuación.

Manos a la obra

El problema anterior se expresa como una **ecuación cuadrática**, que es aquella, en la cual encontramos una **incógnita** elevada al cuadrado, de ahí que se conocen como ecuaciones de segundo grado; éstas las podemos representar de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En donde tenemos que:

x es la incógnita.
a puede valer cualquier número *diferente de cero*, esto porque si fuera *cero se eliminaría* la variable elevada al cuadrado.
b y c pueden ser números cualesquiera. Si b y c son distintos de *cero*, la ecuación se llama *completa*; en caso contrario, *incompleta*.

En este tipo de ecuaciones es difícil despejar la incógnita, para resolver este tipo de ecuaciones existen diferentes procedimientos. En esta ocasión utilizaremos el método de la fórmula general.

La fórmula general es la siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Realicemos un ejercicio y veamos cómo se resuelven las ecuaciones.
Ejemplos:

I. $-5x^2 + 13x + 6 = 0$

a) Anotar el valor de los coeficientes. **a** = -5, b = 13*y* c=6
b) Sustituir el valor de los coeficientes en la fórmula general.
c) Se hace la reducción de términos semejantes.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(13) \pm \sqrt{(13)^2 - 4(-5)(6)}}{2(-5)}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 20(6)}}{-10}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 120}}{-10}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{-10}$$

$$x = \frac{-13 \pm 17}{-10}$$

Ahora se obtendrán x_1 y x_2; x_1 se obtiene al considerar solamente el signo + y x_2 se obtiene al tomar el signo –, quedando así

$$x_1 = \frac{-13 + 17}{-10} = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5}$$

$$x_2 = \frac{-13 - 17}{-10} = \frac{-30}{-10} = 3$$

Ahora tenemos las soluciones:

$$x_1 = -\frac{2}{5} \text{ y } x_2 = 3$$

Comprobemos sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación original:

Para x_1 tenemos; $-5(-\frac{2}{5})^2 + 13(-\frac{2}{5}) + 6 = 0$

Para x_2 tenemos; $-5(3)^2 + 13(3) + 6 = 0$

II. Completa el siguiente ejercicio anotando en la línea los datos faltantes.

$$6x^2 + 7x - 20 = 0$$

a) Anotar el valor de los coeficientes. a = ____ b = ____ c = ____
b) Sustituir el valor de los coeficientes en la fórmula general.
c) Se hace la reducción de términos semejantes.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4(6)(-20)}}{2(6)}$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{\quad - \quad (- \quad)}}{\quad}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{\quad + \quad}}{\quad}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{\quad}}{\quad}$$

$$x = \frac{- \quad \pm \quad}{\quad}$$

$$x_1 = \frac{\quad + \quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

$x_2 = \frac{-}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = -\frac{\quad}{\quad}$

Ahora tenemos las soluciones:

$x_1 =$ y $x_2 =$

Comprobemos sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación original:

Para x_1 tenemos; $6(\_\_\_\_\_)^2 + 7(\_\_\_\_\_) -20 = 0$

Para x_2 tenemos; $6(\_\_\_\_\_)^2 + 7(\_\_\_\_\_) -20 = 0$

III. De acuerdo con el procedimiento anterior resuelve las siguientes ecuaciones en tu cuaderno:

a) $x^2 - 4x + 4 = 0$

b) $7x^2 + 21x - 28 = 0$

c) $-x^2 + 4x - 7 = 0$

d) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

e) $x^2 - 5x - 84 = 0$

SESIÓN 7. Resolución de ecuaciones. Factorización

Propósito
En esta sesión aprenderás a resolver ecuaciones cuadráticas utilizando la factorización.

Para empezar
Resuelve el siguiente problema.

El cuadrado de un número, menos el doble de ese número menos 24 es igual a 0. ¿Cuál es el valor de esos números? ____________ ¿Cómo los obtuviste?

____

Manos a la obra
La ecuación que describe el problema anterior es la siguiente:

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

Como ya lo mencionamos en la sesión anterior, una *ecuación cuadrática* es aquella en la cual encontramos *una incognita* elevada al cuadrado y podemos representarla de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para resolver este tipo de ecuaciones, utilizaremos el método de la factorización.

Primero se obtiene la raíz del primer término y se buscan dos números, que multiplicados entre sí den como resultado el valor de *c*, y sumados tengan el valor de *b*.

Realicemos un ejercicio y veamos cómo se resuelven las ecuaciones por medio de la factorización.

Ejemplos:

I. $x^2 - 2x - 24 = 0$

a) Obtener la raíz cuadrada del primer término;
b) Se buscan dos números, que multiplicados entre sí den como resultado el valor de *c* y sumados el valor de *b;*

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

x^2	$-2x$	-24	$= 0$
x	$=$	-6	
x	$=$	4	

- 6	×	4	=	-24	✓
- 6	+	4	=	-2	
6	×	- 4	=	-24	×
6	+	- 4	=	2	

c) Se forman los dos factores que representan la ecuación igualada con 0.

Se forman los factores y tenemos **factorizada la ecuación**:

$$(x - 6)\ (x + 4)$$

Ahora para *resolver la ecuación,* es decir, encontrar los valores de x tenemos que:

$$(x - 6)\ (x + 4) = 0$$

Como son dos términos que se multiplican para que el resultado sea cero, uno de ellos debe ser cero, así que:

Caso 1: si $(x - 6) = 0$ por lo tanto $0\ (x + 4) = 0$

Caso 2: si $(x + 4) = 0$ por lo tanto $(x - 6)\ 0 = 0$

¿Cuál será el valor para x en cada caso?

Caso 1

$$x - 6 = 0$$
$$\therefore\ x = 6$$

Caso 2

$$x + 4 = 0$$
$$\therefore\ x = -4$$

Comprobemos sustituyendo los valores en la ecuación original:

Si $x = 6$	Si $x = -4$
$x^2 - 2x - 24 = 0$	$x^2 - 2x - 24 = 0$
$(6)^2 - 2(6) - 24 = 0$	$(-4)^2 - 2(-4) - 24 = 0$
$36 - 12 - 24 = 0$	$16 + 8 - 24 = 0$
$36 - 36 = 0$	$24 - 24 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

Ahora sabemos que las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x - 24 = 0$ son: $x = 6$ y $x = -4$

Veamos otro ejemplo:

II. $x^2 - 4x - 5 = 0$

a) Obtener la raíz cuadrada del primer término;
b) Se buscan dos números, que multiplicados entre sí den como resultado el valor de c y sumados el valor de b;

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

x^2	$-4x$	-5	$= 0$
x	$=$	$+1$	
x	$=$	-5	

-5	×	1	=	-5	✓
-5	+	1	=	-4	
5	×	-1	=	-5	×
5	+	-1	=	4	

c) Se forman los dos factores que representan la ecuación igualada con cero.

Se forman los factores y tenemos **factorizada la ecuación**:

$$(x - 5)\ (x + 1)$$

Ahora para *resolver* la *ecuación*, es decir encontrar los valores de x tenemos que:

$$(x - 5)\,(x + 1) = 0$$

Como son dos términos que se multiplican para que el resultado sea cero, uno de ellos debe ser cero, así que:

Caso 1: si $(x - 5) = 0$ por lo tanto $0\,(x + 1) = 0$

Caso 2: si $(x + 1) = 0$ por lo tanto $(x - 5)\,0 = 0$

¿Cuál será el valor para x en cada caso?

Caso 1

$$x - 5 = 0$$
$$\therefore\ x = 5$$

Caso 2

$$x + 1 = 0$$
$$\therefore\ x = -1$$

Comprobemos:

Si $x = 5$	Si $x = -1$
$x^2 - 4x - 5 = 0$	$x^2 - 4x - 5 = 0$
$(5)^2 - 4(5) - 5 = 0$	$(-1)^2 - 4(-1) - 5 = 0$
$25 - 20 - 5 = 0$	$1 + 4 - 5 = 0$
$25 - 25 = 0$	$5 - 5 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

Ahora sabemos que las soluciones de la ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$ son: $x = 5$ y $x - 1$

III. Completa el siguiente ejercicio anotando en la línea los datos faltantes.

$$x\ (x - 5) = 6$$

Tenemos que modificar nuestra ecuación a la del tipo, $ax^2 + bx + c = 0$

$$x\ (x - 5) = 6$$
$$x^2 - 5x = 6$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

a) Obtén la raíz cuadrada del primer término;
b) Busca dos números, que multiplicados entre sí den como resultado el valor de *c* y sumados el valor de *b;*

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

x^2 $\quad - 5x \quad - 6 \quad = 0$

x = ____

x = ____

____	×	____	=	-6	✓
____	+	____	=	-5	
____	×	____	=		×
____	+	____	=		

c) Se forman los dos factores que representan la ecuación igualada con cero.

Se forman los factores y tenemos *factorizada la ecuación:*

$(x$ ______$)$ $(x$ ______$)$

Ahora para *resolver la ecuación,* es decir encontrar los valores de x se tiene que:

$(x$ ______$)$ $(x$ ______$) = 0$

Como son dos términos que se multiplican para que el resultado sea cero, uno de ellos debe ser cero, así que:

Caso 1: si $(x$ ______$) = 0$ por lo tanto 0 (______) $= 0$

Caso 2: si (______) $= 0$ por lo tanto (______) $0 = 0$

¿Cuál será el valor para x en cada caso?

Caso 1

______ $= 0$

$\therefore\ x =$ ______

Caso 2

______ $= 0$

$\therefore\ x =$ ______

Comprobemos:

Si $x =$ ______	Si $x =$ ______
$x^2 - 2x - 24 = 0$	$x^2 - 2x - 24 = 0$
$(6)^2 - 2(6) - 24 = 0$	$(-4)2 - 2(-4) - 24 = 0$
$36 - 12 - 24 = 0$	$1 + 8 - 24 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

Resuelve las siguientes ecuaciones en tu cuaderno por el método de factorización:

a) $x^2 + 8x = -15$
b) $x^2 - 12x + 27 = 0$
c) $x^2 + 20x = -75$
d) $x^2 + 35x + 300 = 0$
e) $x^2 - 6x = 72$
f) $x^2 - 25x + 100 = 0$
g) $x^2 + 0.8x + 0.15 = 0$

Si conoces cómo resolver las ecuaciones por otro procedimiento, explícalo y resuélvelas en tu cuaderno.

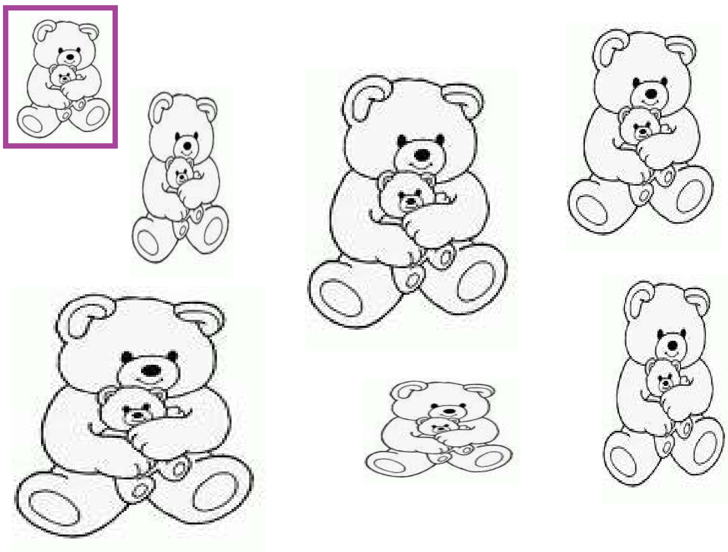
SESIÓN 8. Figuras semejantes

Propósito

En esta sesión aprenderás cuáles son las condiciones que deben tener dos figuras geométricas para que se diga que son semejantes.

Para empezar

En el siguiente cuadro encontrarás diferentes figuras, encierra las que son semejantes a la que se encuentra con el contorno verde.



¿Cuántas figuras encerraste? ______________________________

¿Piensas que estas figuras son semejantes? ______________________
¿Por qué? ____

Manos a la obra

I. Observa la siguiente figura.

Ahora mide la altura del edificio de la figura de la izquierda, ¿cuánto mide? ______

Mide la altura del edificio de la derecha, ¿cuánto mide? ______

Mide el ancho de la base del edificio de la figura de la izquierda, ¿cuánto mide? ______

______

Mide el ancho de la base del edificio de la figura de la derecha, ¿cuánto mide? ______

______

¿Crees que estas figuras son semejantes? ______ ¿Por qué? ______

______

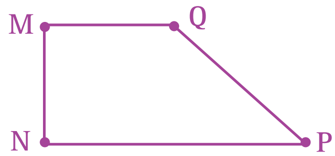
Ahora en el recuadro siguiente, con ayuda de tu regla, traza dos líneas verticales que midan la altura de cada edificio, y dos líneas horizontales que midan el ancho de cada edificio.

¿Qué relación hay entre las líneas verticales? ______

¿Qué relación hay entre las líneas horizontales? ______

Cuando las medidas de una figura respecto a otra que es igual, pero de diferentes medidas, son proporcionales se dice que son *figuras semejantes*.

II. Observa la siguiente figura.



Anota las medidas de los segmentos de recta:

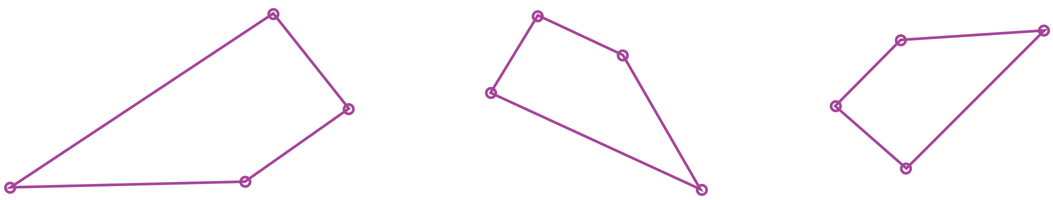
$\overline{MN}$= ______________________

$\overline{NP}$= ______________________

$\overline{QP}$= ______________________

$\overline{MQ}$= ______________________

Mide los lados de las siguientes figuras y tacha el trapecio que es proporcional al anterior? y anótales M’, N’, Q’ y P’, respectivamente.



¿Cuál de las figuras es semejante a la original? ______________________

Ahora mide los ángulos de la figura original y compáralos con la que tachaste.

¿Qué medidas tienen los ángulos de la figura qué tachaste? ______________________

¿Cómo son esos ángulos respecto a los ángulos de la figura original?______________

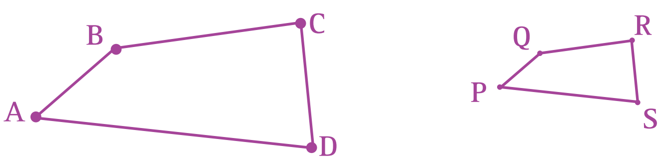
Cuando los ángulos de las figuras que se están comparando son iguales se dice que las figuras son semejantes o que están hechas a escala.

En matemáticas, cuando dos polígonos están hechos a escala se dice que son *polígonos semejantes*. Los polígonos semejantes cumplen con dos condiciones:

a) Las medidas de los lados correspondientes de los polígonos son proporcionales.

b) Sus ángulos correspondientes son iguales.

Por ejemplo, el polígono PQRS es semejante al polígono ABCD:



a) Las medidas de los lados del polígono ABCD son proporcionales a las medidas de los lados del polígono PQRS.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{SP}} = 2$$

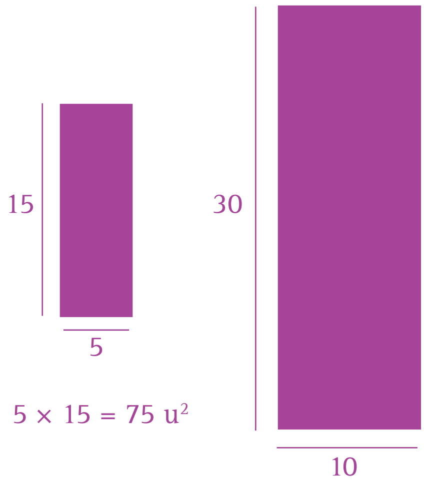
El número 2 es la razón de semejanza del polígono mayor con respecto al menor.

b) Los ángulos correspondientes son iguales:

$\measuredangle A = \measuredangle P$ $\quad$ $\measuredangle B = \measuredangle Q$ $\quad$ $\measuredangle C = \measuredangle R$ $\quad$ $\measuredangle D = \measuredangle S$

Escribe con tus propias palabras qué quiere decir que dos figuras son semejantes.

Es importante también mencionar que dos figuras de la misma forma pueden ser semejantes si el área de las mismas cumple con una razón de semejanza, por ejemplo.



$5 \times 15 = 75 \text{ u}^2$

$10 \times 30 = 300 \text{ u}^2$

¿Cuál es la razón de semejanza entre estas dos áreas? ______________________

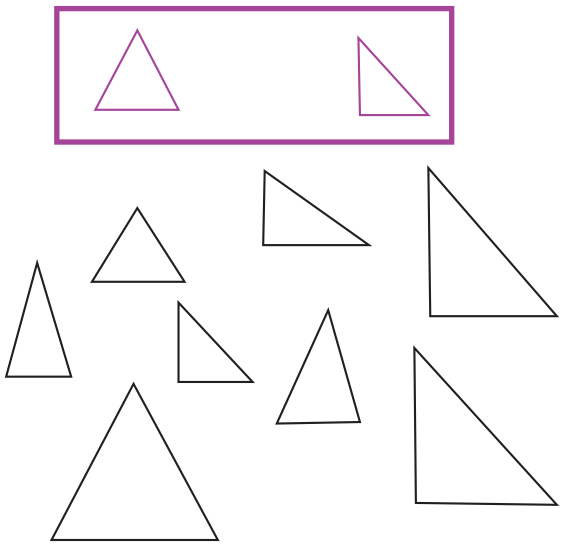
SESIÓN 9. Triángulos semejantes

Propósito

En esta sesión aprenderás los criterios de semejanza de triángulos y aplicarás la semejanza de triángulos para calcular distancias inaccesibles.

Para empezar

En el siguiente espacio encontrarás diferentes triángulos, encierra los que son semejantes a los de contorno verde.



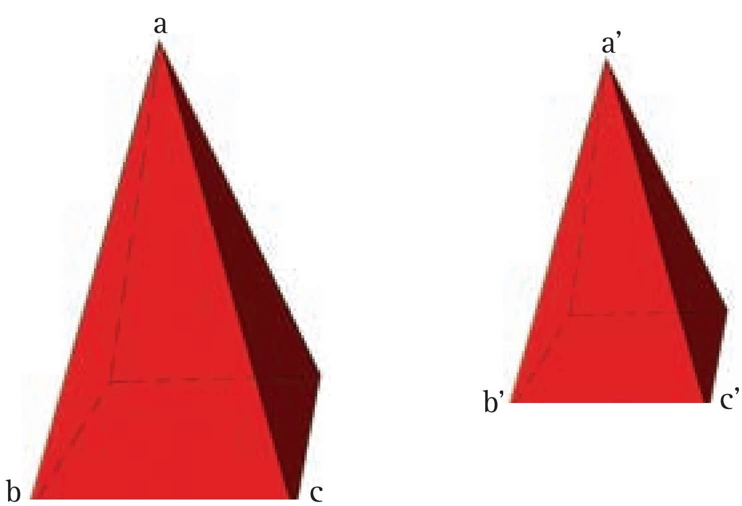
¿Te fue complicado localizar los triángulos semejantes? ____________________________

¿Qué características tienen los triángulos que encerraste?

____

Manos a la obra

I. Observa la siguiente figura.



Ahora mide los lados de la pirámide de la izquierda, ¿cuánto miden? ______________

Ahora mide los lados de la pirámide de la derecha, ¿cuánto miden? ______________

Ahora mide los ángulos de la pirámide de la izquierda, ¿cuánto miden? ______________

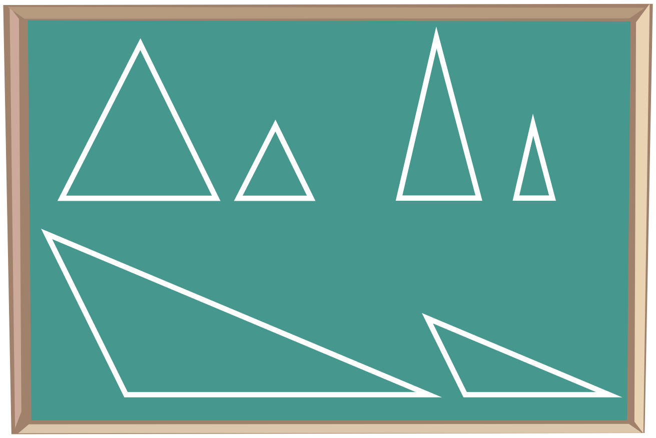
Ahora mide los ángulos de la pirámide de la derecha, ¿cuánto miden? ______________

Determina si estas pirámides son semejantes ___________ ¿Por qué? ______________

____

II. Resuelve el siguiente ejercicio.

El maestro de matemáticas explica a los alumnos las características que tienen los triángulos, para ello dibujó en el pizarrón unos triángulos, como se muestran en la figura.

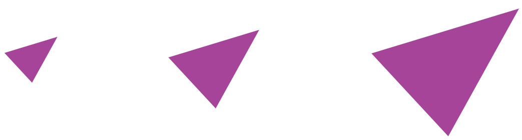


¿Qué similitudes encuentras en cada una de las parejas de triángulos? ______________

¿Cuál es la razón de proporcionalidad? ______________________________________

¿Son proporcionales las medidas de los lados correspondientes? __________________

III. Observa los triángulos siguientes, mide sus ángulos, y compáralos.



¿Cuál es la razón de proporcionalidad? ______________________________________

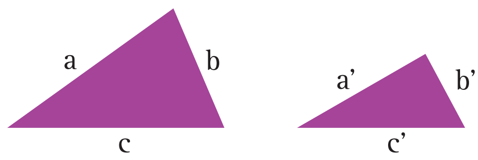
¿Cuáles son las medidas de los ángulos? ______________________________________

¿Qué características tienen los tres triángulos? ________________________________

Se dice que *dos triángulos son semejantes si tienen los lados correspondientes proporcionales y los ángulos correspondientes iguales.*

De lo anterior se desprenden los criterios de semejanza siguientes, esto es que con cumplir alguno de ellos se puede afirmar que los triángulos son semejantes:

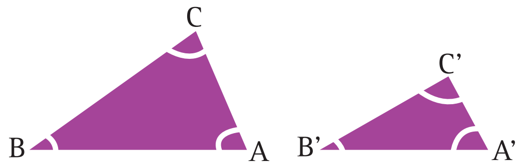
Criterio 1



Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados correspondientes proporcionales.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

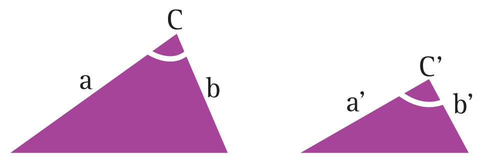
Criterio 2



Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos correspondientes iguales.

$$A = A'$$
$$B = B'$$
$$C = C'$$

Criterio 3



Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.

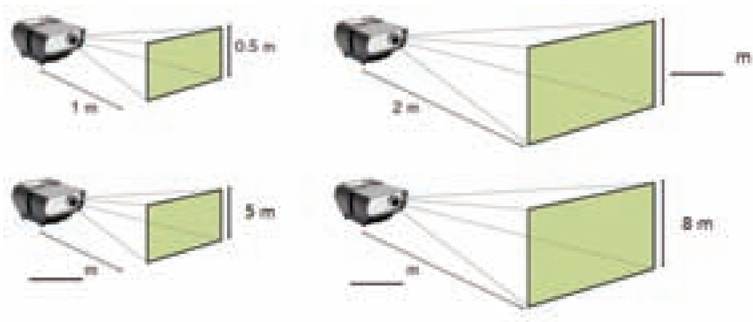
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \qquad C = C'$$

SESIÓN 10. Variación directamente proporcional

Propósito
En esta sesión aprenderás a encontrar expresiones algebraicas que corresponden a la variación directamente proporcional y su aplicación en la solución de problemas.

Para empezar
Resuelve el siguiente problema.
Cuando una imagen se proyecta sobre una pantalla, su tamaño aumenta. Este aumento depende de la distancia a la que se encuentre el proyector respecto de la pantalla.

Anota en la línea la distancia o el tamaño de la imagen de acuerdo con los datos dados.



¿Qué relación observas entre las imágenes? ______________________________

____

Manos a la obra

I. Resuelve el siguiente problema.

Se necesita construir una barda de 2 m de altura, para cercar un terreno que mide 360 m de perímetro.

Un albañil menciona que entre más trabajadores haya, más metros cuadrados se construirán y así terminarán más rápido. Ayúdale a completar la siguiente tabla.

Trabajadores	m^2 construidos
2	24
4	48
8	
10	
12	144
15	
17	
19	
20	
22	

Contesta las siguientes preguntas:

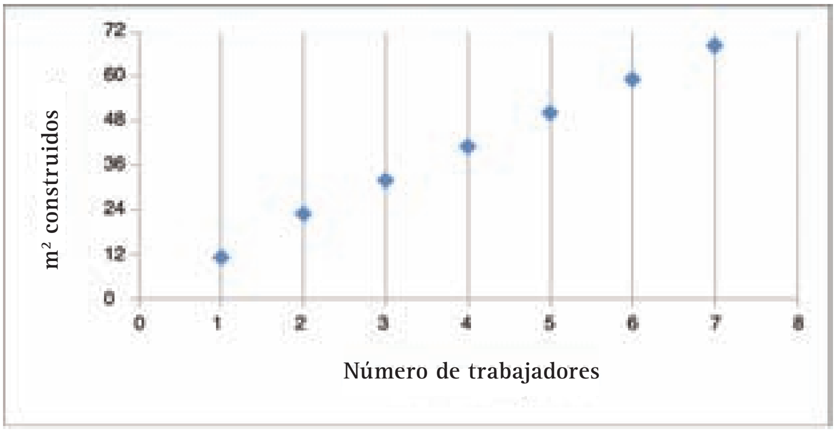
¿Qué operación hay que hacer para completar la segunda columna a partir de la primera? ________________________ ¿Por cuál número se hace? __________________________

Si se denota con la letra x al número de trabajadores, ¿cuál es la expresión que representa los metros cuadrados construidos? ________________________

¿Cuántos trabajadores se necesitan para construir 240 m^2? ______________

¿Cuántos trabajadores se necesitan para terminar la barda? _______________

Si graficáramos el problema anterior tendríamos lo siguiente:



En la gráfica es visible cómo al aumentar el número de trabajadores de uno en uno, los metros cuadrados que se construyen aumentan en una proporción de 12 en 12, este número viene siendo la constante de proporcionalidad para este problema.

Dos cantidades son directamente proporcionales cuando al aumentar el valor de una, aumenta el valor de la otra en la misma proporción.

Cuando tenemos una variación directa se deben cumplir las dos condiciones siguientes:

Al aumentar una cantidad, aumenta la otra cantidad en la misma proporción.
Al disminuir una cantidad, disminuye la otra cantidad en la misma proporción.

Para verificar que este cambio proporcional se ha dado en las dos cantidades, se requiere que cada valor nuevo de la primera cantidad se multiplique por un número definido llamado *constante de proporcionalidad*, y así nos dará el valor correspondiente para la segunda cantidad.

II. Realiza el siguiente problema, completa la tabla y contesta las preguntas.

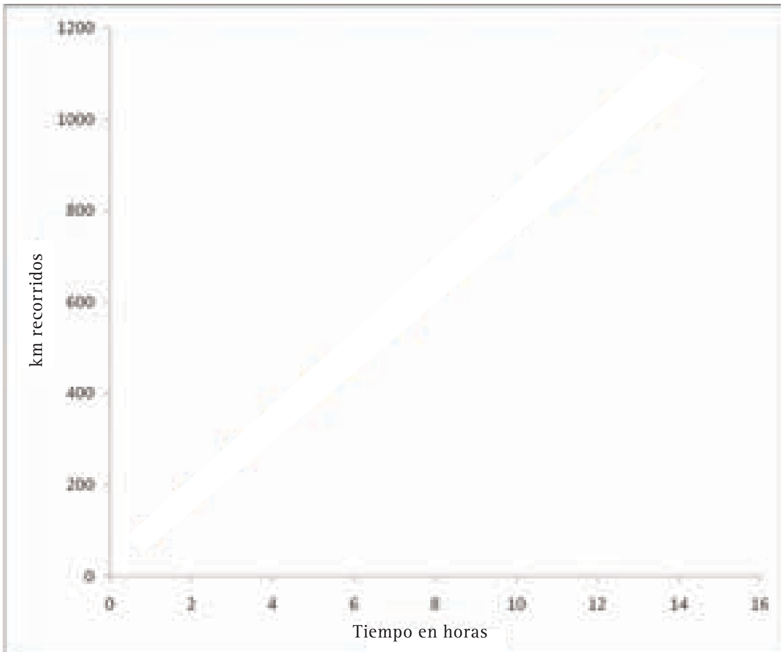
Román se va a ir de vacaciones a Mazatlán, si sale de la Ciudad de México, en su coche a una velocidad constante de 95 km/h y deberá recorrer 1 026 km.

¿Cuánto tiempo tardará en llegar a Mazatlán? ______________________________

Km recorridos	Tiempo en horas
95	1

¿Cuánto tiempo tardará en llegar a Mazatlán si aumenta la velocidad al doble? ______

Grafica, los datos obtenidos.



¿Cuántos kilómetros recorrió Román en 6 horas? ______________________________

¿Cuántos kilómetros recorrió en total ida y vuelta? ____________________________

¿Cuánto tiempo llevaba si había recorrido 845.5 km? ___________________________

Explica cuál es la constante de proporcionalidad en este problema.

____

SESIÓN 11. Teorema de Tales

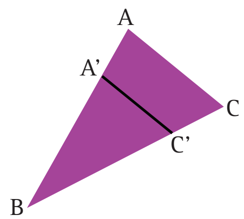
Propósito
En esta sesión conocerás y aplicarás el teorema de Tales.

Para empezar
Anteriormente estudiamos la semejanza de triángulos y se mencionaron algunas características para que se cumpliera la semejanza. Ahora veremos otro procedimiento para saber si dos triángulos son semejantes.

Tales de Mileto (639-549 a.C.) propuso un teorema en el cual, por medio del paralelismo entre dos rectas se puede determinar que dos triángulos son semejantes, si se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados.

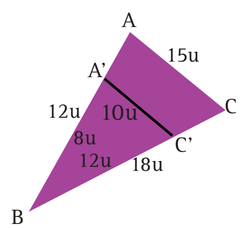
Manos a la obra
Comprobemos lo que Tales afirmó.

I. Se traza una recta paralela al segmento $\overline{AC}$ en el triángulo ABC.



Se formó otro triángulo al que se nombrara A’ B C’.

Posteriormente se miden las longitudes de los lados correspondientes de los dos triángulos.



Ahora se verifica que los lados correspondientes son proporcionales.

$$\frac{15}{10} = \frac{12}{8} = \frac{18}{12} = 1.5$$

Resulta que los dos triángulos son semejantes y la razón de proporcionalidad es 1.5.

Esto se explica:

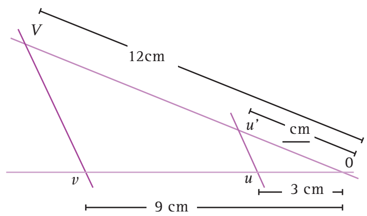
El segmento de recta A C es 1.5 veces más grande que el segmento A' C'

El segmento de recta A B es 1.5 veces más grande que el segmento A' B

El segmento de recta B C es 1.5 veces más grande que el segmento B C'

II. Apliquemos el Teorema de Tales:

En el siguiente triángulo se trazaron rectas paralelas UU' y VV' para formar los triángulos semejantes OUU' y OV V'.



¿Cuál es el valor del segmento $\overline{OU'}$?

____

¿Cómo lo obtuviste? ____

____

¿Cuál es la razón de semejanza entre los triángulos? ____________________

____

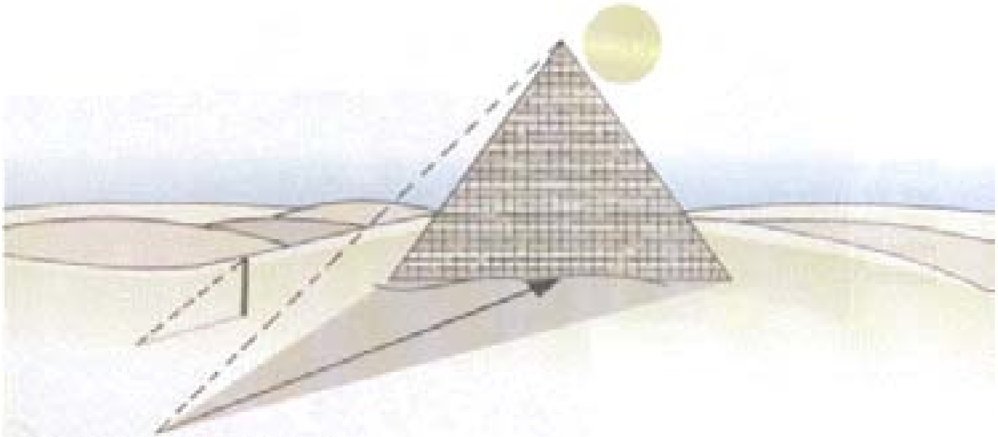
III. Se requiere saber cuál es la altura de un edificio sin medirlo físicamente.

¿Se puede saber su altura sin medirla directamente? ____________________

¿Se puede saber su altura, conociendo la distancia de la sombra que proyecta?

____

Tales calculó la altura de la Gran Pirámide de Keops en Egipto sin medirla directamente, basándose en la longitud de la sombra de su bastón. Tales decía que la altura del bastón y la altura de la pirámide son segmentos paralelos.



Por tanto, el triángulo que forma el bastón con su sombra es semejante al que forma la pirámide con la suya.

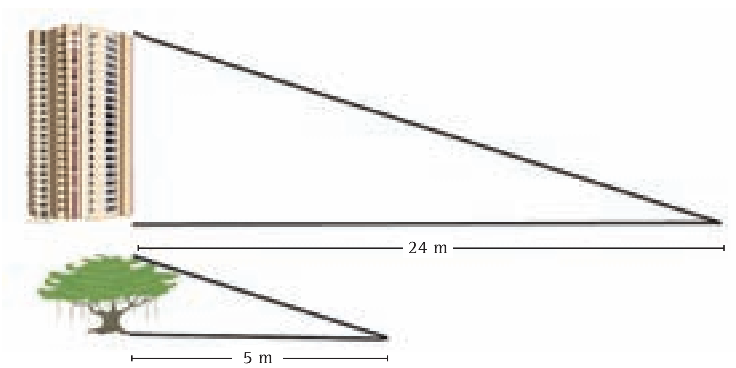
Entonces se cumplía su teorema:

$$\frac{\text{Altura de la pirámide}}{\text{Altura del bastón}} = \frac{\text{Sombra de la pirámide}}{\text{Sombra del bastón}}$$

Por lo tanto:

$$\text{Altura de la pirámide} = \text{Altura del bastón} \times \frac{\text{Sombra de la pirámide}}{\text{Sombra del bastón}}$$

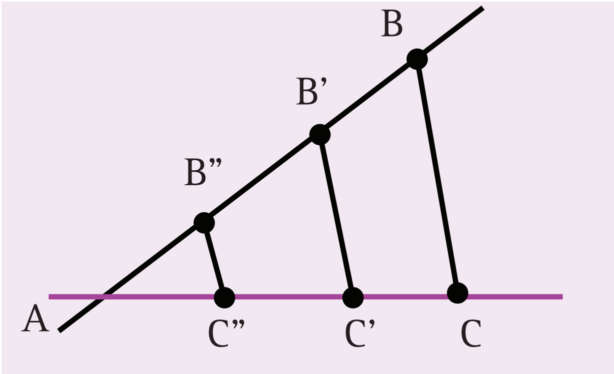
¿Cuál es la altura de un edificio que proyecta una sombra de 24 m si se sabe que un árbol con 2 m de altura proyecta una sombra de 5 m? ______________________________



Cuando dos rectas que se intersecan son cortadas por dos o más paralelas, se cumple que las medidas de los segmentos formados por las paralelas que intersecan a una de las rectas son proporcionales a las medidas de los segmentos correspondientes formados por las paralelas que intersecan a la otra.

A este enunciado se le conoce como teorema de Tales.

Es decir, toda recta paralela a un lado de un triángulo ABC que corta a los otros dos lados, determina un triángulo A‘B‘C‘ semejante al triángulo inicial.

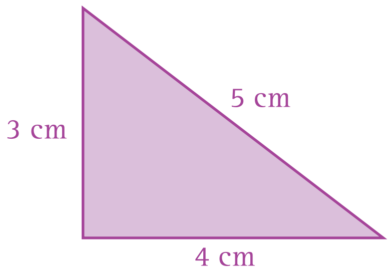


Para la siguiente sesión
será necesario usar
tijeras y regla.

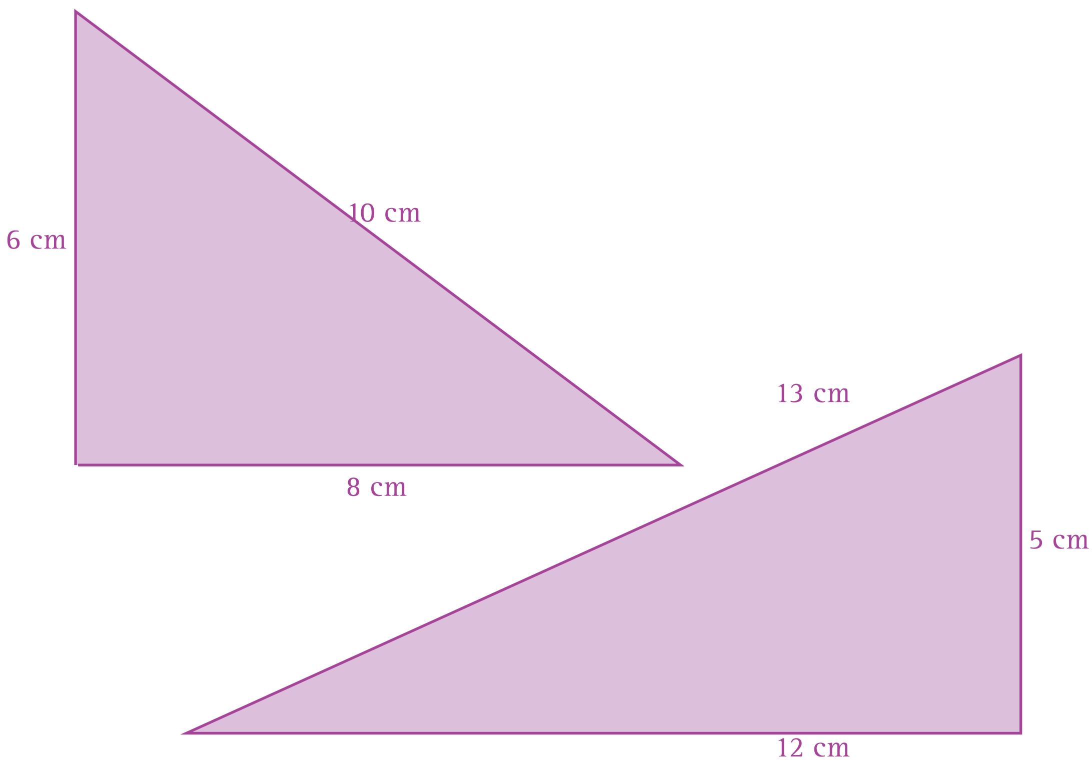
SESIÓN 12. El teorema de Pitágoras

Propósito
Conocerás el teorema de Pitágoras.

Para empezar
Observa el siguiente triángulo rectángulo:



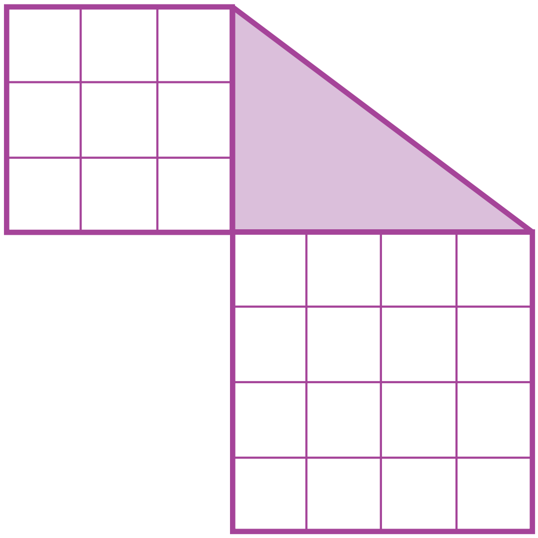
¿Qué relación hay entre las medidas de sus lados? La primera respuesta que se nos ocurre es que son números consecutivos. Sin embargo, esto no sucede con todos los triángulos rectángulos. Observa los siguientes:



Aparentemente no hay una relación matemática entre las medidas de los lados, sin embargo, sí la hay. Descúbrela.

Manos a la obra

I. Dibuja en tu cuaderno el triángulo que mide 3, 4 y 5 cm por lado. Luego dibuja los cuadrados de los catetos y traza dentro de ellos los cm^2 que los conforman para que tu dibujo quede como éste:



II. Recorta los cm^2 y con ellos haz un cuadrado en el que uno de sus lados se forme a partir de la hipotenusa del triángulo. Al terminar contesta las preguntas siguientes:

1. ¿Faltaron o sobraron centímetros cuadrados para formar el cuadrado construido sobre la hipotenusa? ______________________________
2. ¿Esto puede ocurrir en todos los triángulos rectángulos? ______________________
   En equipos, realicen el mismo ejercicio, ahora con los triángulos que miden 6, 8 y 10 cm y 5, 12 y 13 cm. Pueden repartirse cada triángulo. No es necesario separar todos los cm^2, pueden acomodarlos en bloques y acomodarlos en el nuevo cuadrado. Comenten lo que sucede con cada triángulo para responder las preguntas siguientes:
3. ¿Faltaron o sobraron centímetros cuadrados para formar el cuadrado construido sobre la hipotenusa en cada triángulo? ____________________________
4. Con los resultados de las experiencias anteriores, establece la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo ___________________________________
5. ¿Cómo puede expresarse en lenguaje matemático esta relación?

   ____

En todo triángulo rectángulo, si a y b son las medidas de los catetos y c la medida de la hipotenusa se cumple que:

El área del cuadrado de lado c (hipotenusa) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de los lados a y b (catetos). Es decir:

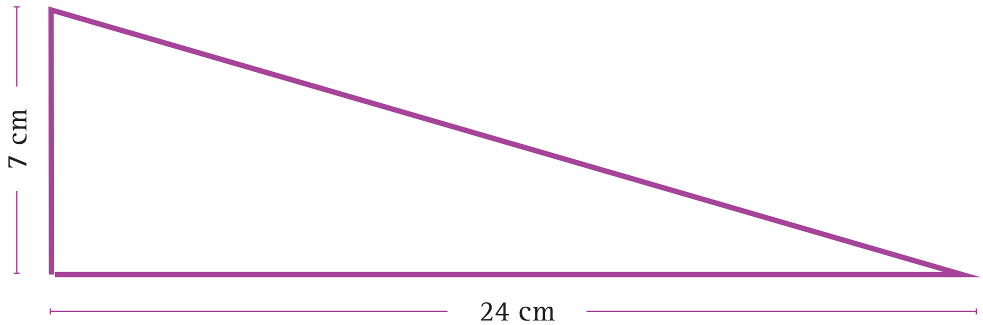
$$a^2 + b^2 = c^2$$

A esta propiedad de los triángulos rectángulos se le llama *Teorema de Pitágoras*. Entonces, para conocer el valor de un lado del triángulo, por ejemplo la hipotenusa, si ya se conoce la medida de los otros dos, se debe hacer un despeje:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejercicio

1. ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo si uno de sus catetos mide 7 cm y el otro 24 cm?



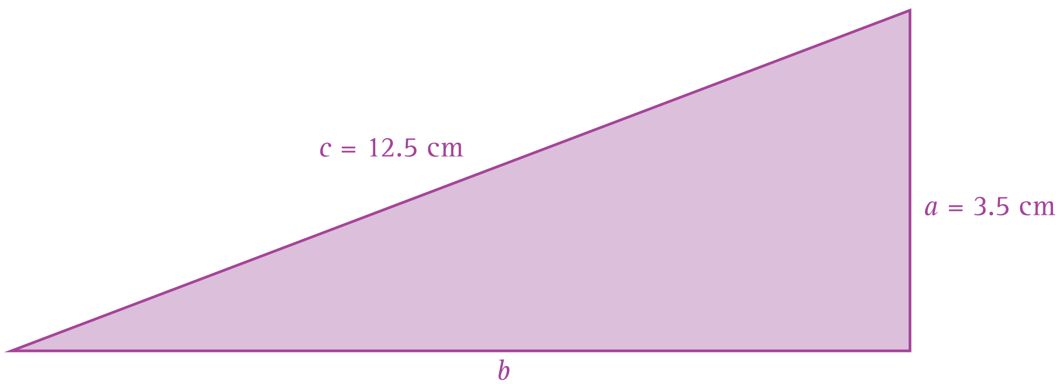
SESIÓN 13. Aplicaciones del Teorema de Pitágoras

Propósito
Aplicarás el Teorema de Pitágoras en el cálculo de longitudes y distancias.

Para empezar
En la sesión anterior se presentó el teorema de Pitágoras como la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo y su expresión matemática:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Con esta expresión se puede conocer la medida de un lado de un triángulo rectángulo cuando se conocen las de los otros dos. Veamos un ejemplo:
¿Cuánto mide el cateto b del siguiente triángulo rectángulo?



La fórmula es:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Como el dato que se busca es b, se despeja esta incógnita:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Con la fórmula anterior se conoce el área del cuadrado que se formaría con el cateto b, pero como lo que necesitamos es su longitud, debe quedar así:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Se sustituyen los valores:

$$b = \sqrt{12.5^2 - 3.5^2}$$

Y se realizan las operaciones:

$$b = \sqrt{156.25 - 12.25}$$

$$b = \sqrt{144}$$

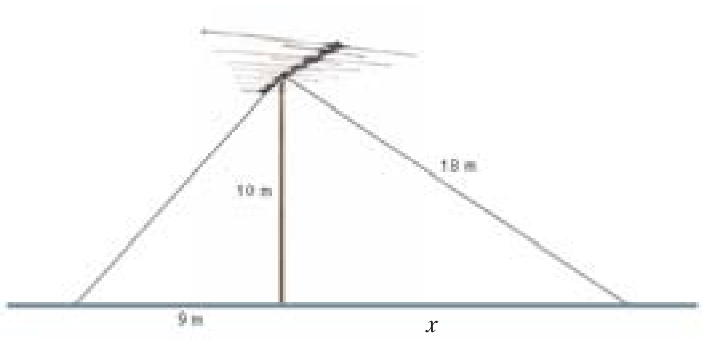
$$b = 12$$

La medida del cateto *b* es 12 cm.

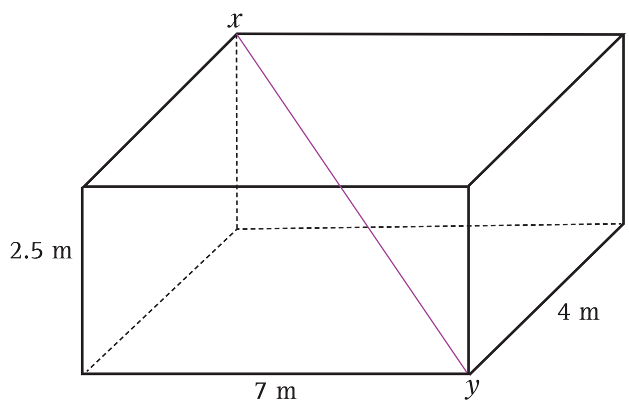
Manos a la obra

I. Resuelve los siguientes problemas.

1. Una antena de TV mide 10 m de altura y está fijada con alambres, uno de los cuales mide 18 m. ¿A qué distancia del pie de la antena se fijó el alambre?



2. La figura muestra un salón con sus dimensiones, en el que se debe tender un cable de manera transversal, del punto *x* al *y*. ¿Cuánto debe medir ese cable?



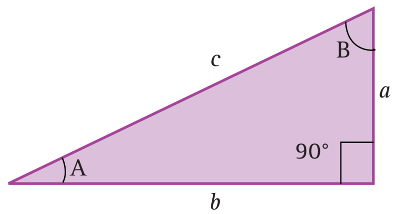
SESIÓN 14. Razones trigonométricas

Propósito

En esta sesión aprenderás a reconocer y determinar las razones trigonométricas en triángulos rectángulos.

Para empezar

En un triángulo rectángulo, al lado opuesto al ángulo A se le llama *cateto opuesto al ángulo A;* y al cateto que forma uno de los lados del ángulo se le llama *cateto adyacente al ángulo A*. Mientras que al lado opuesto al ángulo B se le llama *cateto opuesto al ángulo B* y al cateto que forma uno de los lados del ángulo se le llama *cateto adyacente al ángulo B,* tal como se muestra en la figura.



a = Cateto opuesto al ángulo A
a = Cateto adyacente al ángulo B

b = Cateto adyacente al ángulo A
b = Cateto opuesto al ángulo B

Una razón trigonométrica es la razón de las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo. Las tres razones trigonométricas básicas son el seno, el coseno, y la tangente (*sen*, *cos* y *tan*) y se obtienen de la siguiente manera:

$$sen\ A = \frac{\text{cateto opuesto a } \angle A}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

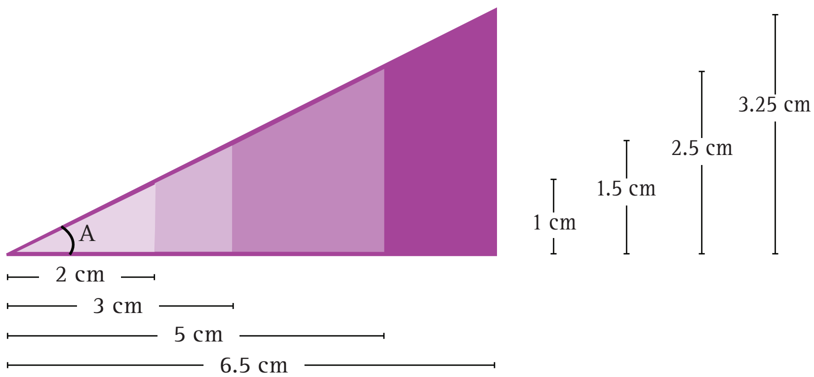
$$cos\ A = \frac{\text{cateto adyacente a } \angle A}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$tan\ A = \frac{\text{cateto opuesto a } \angle A}{\text{cateto adyacente a } \angle A} = \frac{a}{b}$$

Manos a la obra

I. Encuentra las siguientes razones trigonométricas.

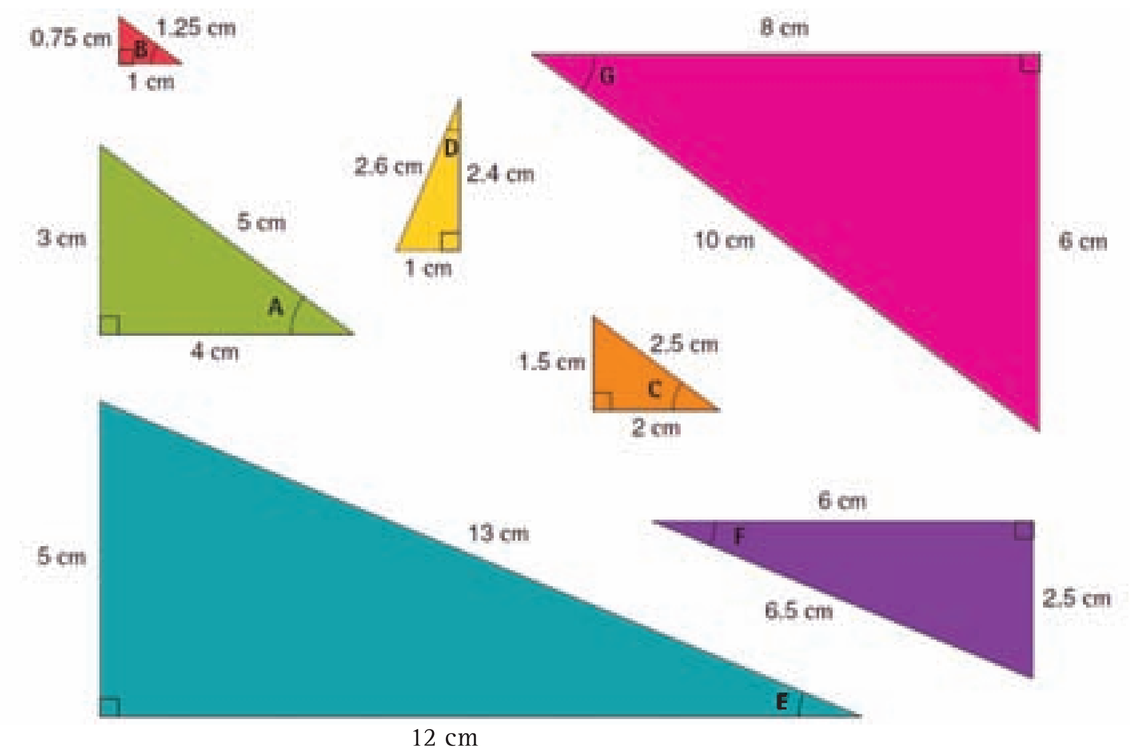
En el siguiente dibujo se encuentran superpuestos cuatro triángulos rectángulos, observa que los cuatro comparten el ángulo A. Completa los datos de la tabla.



	Cateto opuesto al ángulo A	Cateto adyacente al ángulo A	Cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente (esta relación es la tangente del ángulo)
Triángulo rojo	1	2	$\frac{1}{2}$ = 0.5
Triángulo amarillo	1.5		
Triángulo azul	2.5		
Triángulo morado		6.5	

a) ¿Cómo son los cocientes de la tabla anterior, distintos o iguales?________

II. A continuación aparecen siete triángulos en los que se distinguieron los ángulos A, B, C, D, E, F y G, respectivamente.

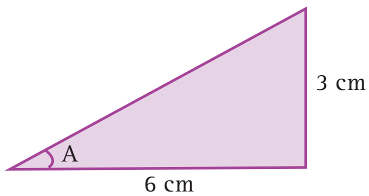


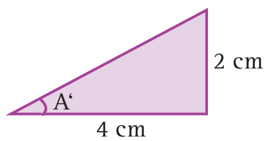
Completa la siguiente tabla usando las medidas de los triángulos anteriores para cada uno de los ángulos marcados en el dibujo.

	Cateto adyacente (cm)	Cateto opuesto (cm)	Hipotenusa (cm)	Coseno = cateto adyacente ÷ hipotenusa	Seno = cateto opuesto÷ hipotenusa
Triángulo verde	4		5	$\frac{4}{5}=0.8$	
Triángulo rojo		0.75			$\frac{0.75}{0.6}= 1.25$
Triángulo naranja		1.5			$\frac{1.5}{2.5}$
Triángulo amarillo			2.6	$\frac{2.4}{2.6}$	
Triángulo azul	12		13		
Triángulo morado		2.5	6.5		
Triángulo rosa		6			$\frac{6}{10}= 0.6$

¿Cuáles triángulos son semejantes al triángulo verde?
¿Cuáles triángulos son semejantes al triángulo azul?
Comparen sus respuestas.

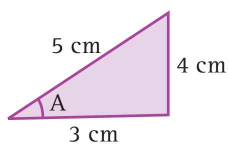
Para dos triángulos rectángulos semejantes, el valor de la tangente de ángulos correspondientes es el mismo. Por ejemplo:

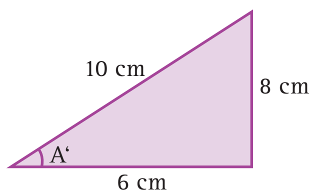




$\tan(A) = \frac{3}{6} = 0.5$ $\quad$ $\tan(A') = \frac{2}{4} = 0.5$

En triángulos rectángulos semejantes el valor del seno y el coseno de ángulos correspondientes es el mismo. Por ejemplo:





$\cos(A) = \frac{3}{5} = 0.6$ $\quad$ $\cos(A') = \frac{6}{10} = 0.6$

$\text{sen}(A) = \frac{4}{5} = 0.8$ $\quad$ $\text{sen}(A') = \frac{8}{10} = 0.8$

En ambos triángulos el valor del coseno es igual para los ángulos A y A′ y el valor del seno también.

SESIÓN 15. Crecimiento exponencial y lineal

Propósito

Interpretar y comparar las representaciones gráficas de crecimiento aritmético o lineal y geométrico o exponencial de diversas situaciones.

Para empezar

La distancia que recorre un móvil a velocidad constante es directamente proporcional al tiempo que transcurre durante su movimiento. Por ejemplo, si un móvil tiene una velocidad constante de 3 m/s, el registro de su desplazamiento es el que se muestra en la gráfica siguiente:

t (s)	d (m)
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

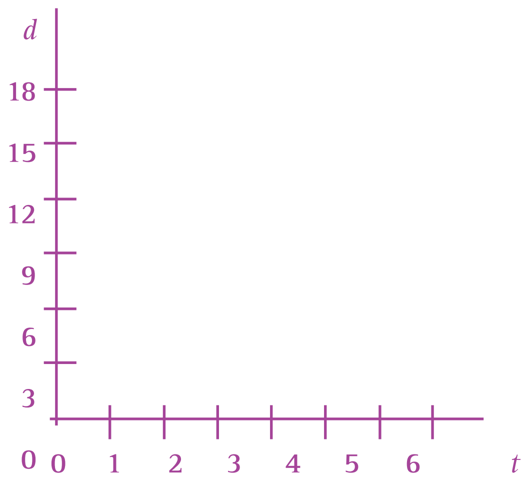
La distancia recorrida aumenta tres unidades en la medida que el tiempo aumenta una unidad y este aumento es constante, por lo que la razón de proporcionalidad es 3, así que la expresión matemática de este fenómeno es:

$$d = 3\ t$$

Donde 3 es la velocidad del móvil.

Manos a la obra

I. Con los datos de la tabla anterior construye la gráfica que describe el comportamiento del móvil:

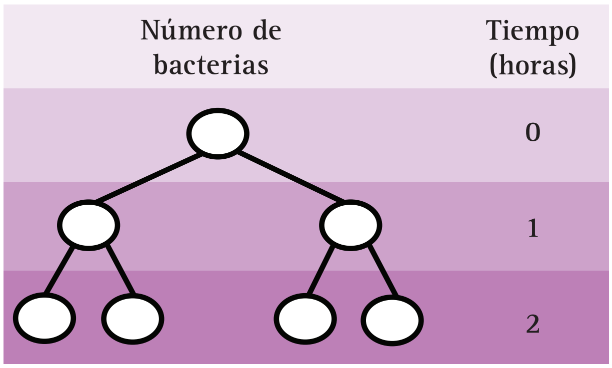


$d = 3$

Las relaciones directamente proporcionales pueden representarse gráficamente con una línea recta.

Asimismo, las relaciones directamente proporcionales presentan progresiones cuyos términos aumentan por adición de una cantidad constante, en nuestro ejemplo la cantidad es 3. A este tipo de crecimiento en la progresión se le llama *crecimiento aritmético.*

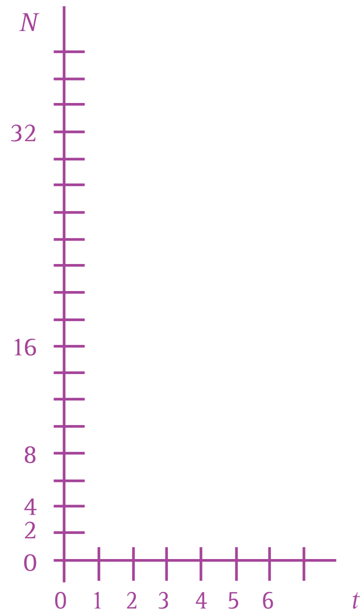
II. Analiza otro tipo de crecimiento:
Hay especies de bacterias en las que a un ejemplar le toma 1 hora para dividirse en dos. Si en un cultivo se comienza con una bacteria, en una hora serán dos y en dos horas serán cuatro. Observa el esquema siguiente:



En la tabla siguiente se ha tabulado el crecimiento de la población de bacterias en las cinco primeras horas:

t (h)	Número de bacterias
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

Con los datos anteriores construye la gráfica del crecimiento de la población de bacterias



Responde:

1. **¿Qué tipo de línea se formó en la gráfica?** ______________________
2. **¿Cómo es el aumento de cada cantidad con respecto a la anterior en el número de bacterias?** ______________________
3. **¿Es un crecimiento aritmético?** ______________________

Observa cómo aumenta el número de bacterias cada hora, ¿qué sucede con el número de bacterias cada hora? ______________________

t (h)	Número de bacterias	
0	1	1
1	2	2
2	4	2×2
3	8	$2 \times 2 \times 2$
4	16	$2 \times 2 \times 2 \times 2$
5	32	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Observa que el número de veces que se multiplica el 2 es el número de horas en que se presenta la población referida, por ejemplo, en la quinta hora hay 32 bacterias, es decir, 2 × 2 × 2 × 2 × 2. La expresión matemática que lo expresa es:

$$N = 2^t$$

Responde:

1. **¿A qué potencia se eleva el 2 en el tiempo cero?** ________ **¿Por qué el 2 elevado a esa potencia da como resultado 1?** ______________________________

____

____

2. **¿A qué potencia se eleva el 2 en el tiempo 1?** ______________________________

Las sucesiones en las que cada término es resultado de multiplicar el término anterior por un número fijo son llamadas *sucesiones exponenciales*. El número fijo por el que se multiplica es llamado *razón común*. Por ejemplo, la sucesión correspondiente a la reproducción de las bacterias es exponencial porque el número de bacterias que habrá cada hora se obtiene multiplicando el número actual por 2, por lo que en este caso la razón común es 2.

Ejercicio

1. **¿Cuál es la expresión matemática que representa la sucesión 7, 14, 28, 56, 112...?**

SESIÓN 16. Resolución de sistemas de ecuaciones por sustitución

Propósito

En esta sesión aprenderás a solucionar un sistema de ecuaciones con el que se puede resolver un problema.

Para empezar

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones con diferentes incógnitas, por ejemplo:

$$5x + 3y = 26$$
$$3x + 8y = 28$$

En un sistema de ecuaciones algebraicas el valor de las incógnitas x y y es común para ambas ecuaciones, esto es que esos valores resuelvan a dichas ecuaciones.

Manos a la obra

I. Aprendamos a resolver sistemas de ecuaciones por sustitución, ejemplo:

Tenemos que resolver el sistema:

$$5x + 3y = 26$$
$$3x + 8y = 28$$

Despejamos una de las incógnitas en una de las ecuaciones (en este caso elegimos y de la primera ecuación):

$$y = \frac{26 - 5x}{3}$$

Y la reemplazamos en la otra ecuación:

$$3x + 8\left(\frac{26 - 5x}{3}\right) = 28$$

Ahora despejamos la incógnita existente:

$$3x + 8\left(\frac{26 - 5x}{3}\right) = 28$$

$$3x + \frac{208 - 40x}{3} = 28$$

$$3x + \frac{208}{3} - \frac{40x}{3} = 28$$

$$3x - \frac{40x}{3} = 28 - \frac{208}{3}$$

Aquí es importante mencionar que nos encontramos con una resta de un número entero menos un número fraccionario.

$$\frac{9x}{3} - \frac{40x}{3} = \frac{84}{3} - \frac{208}{3}$$

$$-\frac{31x}{3} = -\frac{124}{3}$$

$$31x = 124$$

$$x = \frac{124}{31}$$

$$x = 4$$

Posteriormente se reemplaza el valor de x obtenido en alguna de las ecuaciones:

$$5(4) + 3y = 26$$

$$20 + 3y = 26$$

$$3y = 26 - 20$$

$$3y = 6$$

$$y = \frac{6}{3}$$

$$y = 2$$

$$\therefore \quad x = 4,\ y = 2$$

Realizaremos el mismo procedimiento pero ahora despejando x al comienzo.
Recordemos el sistema de ecuaciones:

$$5x + 3y = 26$$

$$3x + 8y = 28$$

Despejamos a x

$$x = \frac{26 - 3y}{5}$$

Y la reemplazamos en la otra ecuación:

$$3\left(\frac{26 - 3y}{5}\right) + 8y = 28$$

Ahora despejamos la incógnita existente:

$$3\left(\frac{26-3y}{5}\right)+8y=28$$

$$\frac{78-9y}{5}+8y=28$$

$$\frac{78}{5}-\frac{9y}{5}+8y=28$$

$$-\frac{9y}{5}+8y=28-\frac{78}{5}$$

Aquí es importante mencionar que nos encontramos con una resta, de un entero menos un fraccionario.

$$-\frac{9y}{5}+\frac{40y}{5}=\frac{140}{5}-\frac{78}{5}$$

$$\frac{31y}{5}=\frac{62}{5}$$

$$31y=62$$

$$y=\frac{62}{31}$$

$$y=2$$

Posteriormente se reemplaza el valor de x obtenido en alguna de las ecuaciones:

$$5x+3(2)=26$$

$$5x+6=26$$

$$5x=26-6$$

$$5x=20$$

$$x=\frac{20}{5}$$

$$x=4$$

$$\therefore\ x=4,\ y=2$$

Verifica que los valores obtenidos resuelvan las ecuaciones del sistema.

II. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en tu cuaderno.

a) $4x+3y=23$

$5x+2y=35$

b) $6x+8y=36$

$5x+3y=19$

SESIÓN 17. Resolución de sistemas de ecuaciones por igualación

Propósito

En esta sesión aprenderás a solucionar un sistema de ecuaciones con el método de igualación.

Manos a la obra

Tenemos que resolver el sistema:

$$5x + 3y = 26$$
$$3x + 8y = 28$$

El primer paso es despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones, en este caso y con lo cual lograremos un sistema equivalente.

$$y = \frac{26 - 5x}{3}$$

$$y = \frac{28 - 3x}{8}$$

Al tener dos ecuaciones, si los primeros miembros son iguales, por lo tanto, los segundos también lo serán:

$$\frac{26 - 5x}{3} = \frac{28 - 3x}{8}$$

Resolvamos:

$$\frac{26 - 5x}{3} = \frac{28 - 3x}{8}$$

$$8\,(\,26 - 5x) = 3(28 - 3x)$$

$$208 - 40x = 84 - 9x$$

$$-40x + 9x = 84 - 208$$

$$-31x = -\,124$$

$$x = \frac{-124}{-31}$$

$$x = 4$$

Sustituimos el valor de x obtenido en alguna de las expresiones:

$$y = \frac{26 - 5x}{3}$$

Realizamos la operación para obtener *y*:

$$y = \frac{26 - 5(4)}{3}$$

$$y = \frac{26 - 20}{3}$$

$$y = \frac{6}{3}$$

$$y = 2$$

Verificamos, en las dos ecuaciones, para comprobar que:

$$x = 4 \text{ y } y = 2$$

$$5x + 3y = 26 \qquad\qquad 3x + 8y = 28$$

$$5(4) + 3(2) = 26 \qquad\qquad 3(4) + 8(2) = 28$$

$$20 + 6 = 26 \qquad\qquad 12 + 16 = 28$$

$$26 = 26 \qquad\qquad 28 = 28$$

Realicemos este mismo ejemplo despejando x al comienzo y reemplazando en las dos ecuaciones.

Recordemos el sistema:

$$5x + 3y = 26$$
$$3x + 8y = 28$$

Despejamos a *x:*

$$x = \frac{26 - 3y}{5}$$

$$x = \frac{28 - 8y}{3}$$

Al tener dos ecuaciones, si los primeros miembros son iguales, por lo tanto, los segundos también lo serán:

$$\frac{26 - 3y}{5} = \frac{28 - 8y}{3}$$

Resolvamos:

$$\frac{26 - 3y}{5} = \frac{28 - 8y}{3}$$

$$3(26 - 3y) = 5(28 - 8y)$$

$$78 - 9y = 140 - 40y$$

$$40y - 9y = 140 - 78$$

$$31y = 62$$

$$y = \frac{62}{31}$$

$$y = 2$$

Sustituimos el valor de y obtenido

$$x = \frac{26 - 3y}{5}$$

Realizamos la operación para obtener el valor de x:

$$x = \frac{26 - 3(2)}{5}$$

$$x = \frac{26 - 6}{5}$$

$$x = \frac{20}{5}$$

$$x = 4$$

Verificamos, en las dos ecuaciones, para comprobar que:

$x = 4$ y $y = 2$

$5x + 3y = 26$	$3x + 8y = 28$
$5(4) + 3(2) = 26$	$3(4) + 8(2) = 28$
$20 + 6 = 26$	$12 + 16 = 28$
$26 = 26$	$28 = 28$

Por cualquiera de los dos procedimientos se cumple la igualdad.

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones, en tu cuaderno, con el método de igualación.

a) $5x + 8y = 58$
   $6x + y = 18$
b) $7x + 12y = 41$
   $3x + 6y = 18$
'c) $8x - 3y = 1$
   $20x + 5y = 65$

SESIÓN 18. Resolución de sistemas de ecuaciones por reducción

Propósito

En esta sesión aprenderás a solucionar un sistema de ecuaciones con el método de reducción.

Manos a la obra

I. Tenemos que resolver el sistema:

$$6x + 3y = 42$$
$$3x + 8y = 47$$

En este procedimiento, el primer paso es eliminar una de las incógnitas. Para poder hacerlo se debe multiplicar una ecuación por un número que nos dé el valor inverso de un término de la otra ecuación para poder eliminar la incógnita, por ejemplo, si queremos eliminar la x, ¿por qué número debo multiplicar a la segunda ecuación, para que al sumarla a la primera se obtenga cero?

Observemos:

$$1)\ 6x + 3y = 42$$
$$2)\ 3x + 8y = 47$$

Para eliminar la x tenemos que multiplicar la ecuación 2 por –2. Es importante mencionar que la ecuación no se altera si es multiplicada por un número.

$$6x + 3y = 42$$
$$-2(3x + 8y = 47)$$

Así tenemos:

$$6x + 3y = 42$$
$$-6x - 16y = -94$$

Ahora se suman las ecuaciones:

$$6x + 3y = 42$$

$$-6x - 16y = -94$$

$$0 - 13y = -52$$

$$y = \frac{-52}{-13}$$

$$y = 4$$

Se sustituye el valor de y en la primera ecuación:

$$6x + 3(4) = 42$$
$$6x + 12 = 42$$

Después se encuentra el valor de x:

$$6x = 42 - 12$$

$$6x = 30$$

$$x = \frac{30}{6}$$

$$x = 5$$

Ya tenemos la solución de nuestro sistema. $y = 4$ y $x = 5$

Verifica en tu cuaderno que estos valores resuelvan el sistema.

II. Realicemos otro ejercicio.

Tenemos que resolver el sistema:

$$9x + 5y = 30$$
$$3x + 8y = 19.5$$

Si queremos eliminar la x, ¿por qué número debo multiplicar a la segunda ecuación, para que al sumarla a la primera se obtenga cero?

Observemos:

$$1)\ 9x + 5y = 30$$
$$2)\ 3x + 8y = 19.5$$

Para eliminar la x tenemos que multiplicar la ecuación 2 por -3

$$9x + 5y = 30$$
$$-3(3x + 8y = 19.5)$$

Y tenemos:

$$9x + 5y = 30$$
$$-9x - 24y = -58.5$$
$$9x + 5y = 30$$
$$-9x - 24y = -58.5$$
$$0 - 19y = -28.5$$

$$y = \frac{-28.5}{-19}$$

$$y = 1.5$$

Se sustituye el valor de y en la primera ecuación:

$$9x + 5(1.5) = 30$$
$$9x + 7.5 = 30$$

Después se encuentra el valor de x:

$$9x = 30 - 7.5$$
$$9x = 22.5$$
$$x = \frac{22.5}{9}$$
$$x = 2.5$$

Ya tenemos la solución de nuestro sistema:

$$y = 1.5 \text{ y } x = 2.5$$

Verifica en tu cuaderno que estos valores resuelvan el sistema.

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones, en tu cuaderno, como se realizó anteriormente.

a) $6x + 6y = 72$
$7x + 3y = 64$

b) $8x - 4y = 15$
$4x + 8y = 10$

c) $2x + 3y = 11.5$
$4x - 5y = 17.5$

SESIÓN 19. Resolución de sistemas de ecuaciones por determinantes I

Propósito

En esta sesión aprenderás a solucionar un sistema de ecuaciones por medio de determinantes.

Manos a la obra

Una matriz es un grupo de números organizados en filas y columnas en una tabla y es una herramienta útil para resolver sistemas de ecuaciones. En este caso, los números a los que nos referimos son los coeficientes de las incógnitas y los resultados. Observa el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ -x + 5y &= 12 \end{aligned}$$

Para representar a los coeficientes y resultados de las ecuaciones usemos las letras a, b y c con subíndices que indican si se trata de la primera ecuación o de la segunda:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones encontrando el valor de y se organizan los coeficientes en dos matrices, como se muestra a continuación:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Cada matriz se resuelve al realizar una multiplicación cruzada y restando los resultados, como lo indican las flechas:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{a_1 \cdot c_2 - a_2 \ c_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \ b_1}$$

Al realizar la división de los resultados anteriores se encuentra el valor de y.
Retomemos al sistema de ecuaciones del ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ -x + 5y &= 12 \end{aligned}$$

Entonces:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}$$

$$\therefore$$

$$y = \frac{(2)(12) - (-1)(4)}{(2)(5) - (-1)(-3)} =$$

$$y = \frac{(2)(12) - (-1)(4)}{(2)(5) - (-1)(-3)} = \frac{24 + 4}{10 - 3} = \frac{28}{7}$$

$$y = 4$$

El valor de x también puede encontrarse mediante el método de matrices, pero puede recurrirse a la sustitución de y en alguna de las ecuaciones del sistema:

$$2x - 3(4) = 4$$

$$2x - 12 = 4$$

$$2x = 4 + 12$$

$$2x = 16$$

$$x = \frac{16}{2}$$

$$x = 8$$

Verifica que los valores obtenidos resuelvan el sistema.

Ejercicio

Reconoce los valores y desarrolla las matrices de los sistemas de ecuaciones siguientes. No es necesario por ahora realizar las operaciones para encontrar el resultado:

1.

$$-8x - 2y = 4$$
$$7x + 5y = 28$$

$a_1 =$ $b_1 =$ $c_1 =$

$a_2 =$ $b_2 =$ $c_2 =$

Entonces:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix}}$$

$$\therefore$$

$$y = \frac{(\quad)(\quad) - (\quad)(\quad)}{(\quad)(\quad) - (\quad)(\quad)} =$$

2.

$$4x + 9y = 36$$
$$12x - 5y = -8$$

$a_1 =$ $\qquad$ $b_1 =$ $\qquad$ $c_1 =$

$a_2 =$ $\qquad$ $b_2 =$ $\qquad$ $c_2 =$

Entonces:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}}$$

$$\therefore$$

$$y = \frac{(\quad)(\quad) - (\quad)(\quad)}{(\quad)(\quad) - (\quad)(\quad)} =$$

3.

$$-7x - 3y = 45$$
$$x - 6y = -10$$

$a_1 =$ $\qquad$ $b_1 =$ $\qquad$ $c_1 =$

$a_2 =$ $\qquad$ $b_2 =$ $\qquad$ $c_2 =$

Entonces:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}}$$

$$\therefore$$

$$y = \frac{(\quad)(\quad) - (\quad)(\quad)}{(\quad)(\quad) - (\quad)(\quad)} =$$

SESIÓN 20. Resolución de sistemas de ecuaciones por determinantes II

Propósito

En esta sesión aprenderás a solucionar un sistema de ecuaciones por el método de determinantes.

Manos a la obra

Tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$5x + 3y = 26$$
$$3x + 8y = 28$$

Entonces tenemos que:

$$a_1 = 5 \qquad b_1 = 3 \qquad c_1 = 26$$
$$a_2 = 3 \qquad b_2 = 8 \qquad c_2 = 28$$

Por lo que las matrices son:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \therefore y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 26 \\ 3 & 28 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}$$

Observa cómo se organizan los datos para encontrar el valor de x:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \therefore x = \frac{\begin{vmatrix} 26 & 3 \\ 28 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}$$

Se resuelven las matrices, se realiza la división:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 26 \\ 3 & 28 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{5 \cdot 28 - 3 \cdot 26}{5 \cdot 8 - 3 \cdot 3} = \frac{140 - 78}{40 - 9} = \frac{62}{31} = 2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 26 & 3 \\ 28 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{26 \cdot 8 - 28 \cdot 3}{5 \cdot 8 - 3 \cdot 3} = \frac{208 - 84}{40 - 9} = \frac{124}{31} = 4$$

Ya tenemos nuestros resultados del sistema de ecuaciones:

$$y = 2 \text{ y } x = 4$$

Verifica en tu cuaderno sustituyendo los valores.

Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x + 9y = 51$$
$$8x - 4y = 24$$

Entonces tenemos que:

$$a_1 = 3 \qquad b_1 = 9 \qquad c_1 = 51$$
$$a_2 = 8 \qquad b_2 = -4 \qquad c_2 = 24$$

Se organizan las matrices:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \therefore x = \frac{\begin{vmatrix} 51 & 9 \\ 24 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \therefore y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 51 \\ 8 & 24 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}}$$

Se resuelven las matrices y se realiza la división:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 51 & 9 \\ 24 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{51 \cdot -4 - 24 \cdot 9}{3 - (-4) - 8.9} = \frac{-204 - 216}{-12 - 72} = \frac{-420}{-84} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 51 \\ 8 & 24 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot 24 - 8 \cdot 51}{3 \cdot (-4) - 8 \cdot 9} = \frac{72 - 408}{-12 - 72} = \frac{-336}{-84} = 4$$

Ya tenemos nuestros resultados: $x = 5$ y $y = 4$.

Verifica en tu cuaderno estos valores.

Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones, en su cuaderno, como se realizó anteriormente.

a) $6x + 2y = 42$
   $7x + 3y = 53$

b) $8x + 4y = 12$
   $9x + 6y = 21$

c) $2x + 3y = 9$
   $4x + 5y = 10$

Créditos iconográficos

p. 31: Edificio. **p. 35:** Pirámide tetragonal. **p. 36:** Pizarra, ilustración de Félix Vallés Calvo, imágenes tomadas de: Gobierno de España-Ministerio de Educación, Instituto de Tecnologías Educativas, Banco de imágenes y sonidos.

Curso de reforzamiento y regularización.
Matemáticas. Tercer grado. Telesecundaria
se imprimió por encargo de la
Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos,
en los talleres de
con domicilio en

en el mes de de 2011
El tiraje fue de ejemplares.