Curso de reforzamiento y regularización

MATEMÁTICAS

Segundo grado

TELEsecundaria

Curso de reforzamiento y regularización. Matemáticas. Segundo grado. Telesecundaria fue desarrollado por la Dirección General de Materiales Educativos (DGME) de la Subsecretaría de Educación Básica, Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública
Alonso Lujambio Irazábal

Subsecretaría de Educación Básica
José Fernando González Sánchez

Dirección General de Materiales Educativos
María Edith Bernáldez Reyes

Coordinación técnico-pedagógica
Dirección de Desarrollo e Innovación de Materiales Educativos, DGME/SEP
María Cristina Martínez Mercado

Autores
Araceli Castillo Macías, Rafel Durán Ponce, Ernesto Manuel Espinosa Asuar, Silvia García Peña, José Cruz García Zagal, Olga Leticia López Escudero, Jesús Rodríguez Viorato

Recopilación y adaptación de textos
Ángel Daniel Avila Mujica, Gabriel Calderón López

Coordinación editorial
Alejandro Portilla de Buen, Zamná Heredia Delgado

Cuidado editorial
José Agustín Escamilla Viveros

Servicios editoriales
Stega Diseño, S.C.

Formación
Juan Antonio García Trejo

Primera edición, 2010

D.R. © Secretaría de Educación Pública, 2010
Argentina 28, Centro,
06020, México, D.F.

ISBN: [**EN TRÁMITE]**

Impreso en México
DISTRIBUCIÓN GRATUITA-PROHIBIDA SU VENTA

Presentación

En el marco del Fortalecimiento de la Telesecundaria y como resultado de las diferentes Reuniones Nacionales, es necesario brindar estrategias e instrumentos que permitan a los estudiantes de Telesecundaria apropiarse de los contenidos conceptuales de manera que comprendan mejor la dinámica natural y social en la que están inmersos, al mismo tiempo que cuenten con estrategias para ser actores activos y participativos en su realidad local y nacional, y así tengan, finalmente, referentes valorales que les permitan tomar decisiones responsables e informadas en su quehacer cotidiano, tanto dentro como fuera de la escuela.
Por lo anterior se presenta el Curso de reforzamiento y regularización. Matemáticas. Segundo grado. Telesecundaria, que pretende reforzar desde diferentes estrategias aquellos conceptos que han resultado difíciles para los alumnos en su curso regular y que buscan acortar la distancia entre éstos y los estudiantes que tienen un mejor desempeño académico.

Este libro presenta variados recursos didácticos, lo que permite que existan más opciones para acercar el conocimiento a los alumnos.

El material se basa en los materiales del curso regular, adecuados bajo la lógica de que no sean materiales nuevos que impliquen un esfuerzo extra para entender su dinámica, buscan ser un puente entre lo que vieron durante el ciclo escolar con aquellos contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales que han representado alguna dificultad para su adecuada apropiación.

Consideramos que con la ayuda del docente, pieza fundamental en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, se facilitará el uso más amable de este material para reforzar y fortalecer las competencias de los estudiantes de Telesecundaria y se elevarán los índices de aprovechamiento, lo que, esperamos, redunde en un mejor rendimiento escolar.

Esperamos que el esfuerzo hecho por la Secretaría de Educación Pública se refleje en un material útil y práctico para los estudiantes y los docentes, y que éstos lo vean como un apoyo en el mejoramiento de su aprendizaje.

Conoce tu libro

La presente obra está estructurada en diferentes secciones que tienen como objetivo el manejo ordenado de la información de acuerdo con los temas que aparecen en el Programa de estudio 2006 de Matemáticas II y las necesidades de su desarrollo en el salón de clases.

El contenido de este libro consta de cinco secuencias correspondientes a cada bloque que conforma el curso de Matemáticas II.

Cada secuencia está dividida en cuatro sesiones en las que aparecen los temas que se ha definido como los de mayor dificultad para su comprensión y por tal motivo se han desarrollado con un lenguaje accesible y acompañado de apoyos gráficos que faciliten su entendimiento.

Al inicio de cada sesión se presenta su propósito; allí se anuncian los aprendizajes esperados o las habilidades matemáticas que han de adquirirse o ejercitarse durante su desarrollo.

La sección "**Para empezar**" te introduce y ubica en el contexto que te proporciona elementos para emprender las actividades que la sesión presenta.

"**Manos a la obra**" es el apartado que ofrece información y ejemplos que propician la reflexión y toma de decisiones sobre los conceptos matemáticos en turno.

La sección "**Ejercicios**" tiene variados problemas cuyo propósito es reforzar los conocimientos adquiridos y poner en práctica las habilidades desarrolladas durante la sesión.

Programa de sesiones

Semana	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1	**Secuencia 1** Sesión 1. Multiplicaciones de números con signo.	**Secuencia 1** Sesión 2. Problemas aditivos con expresiones algebraicas.	**Secuencia 1** Sesión 3. La relación inversa de una relación de proporcionalidad directa.	**Secuencia 1** Sesión 4. Polígonos de frecuencias.	**Secuencia 2** Sesión 5. Multiplicaciones de polinomios.
2	**Secuencia 2** Sesión 6. División de polinomios.	**Secuencia 2** Sesión 7. Volumen de prismas y pirámides.	**Secuencia 2** Sesión 8. Medidas de tendencia central.	**Secuencia 3** Sesión 9. Sucesiones de números con signo.	**Secuencia 3** Sesión 10. Ecuaciones de primer grado.
3	**Secuencia 3** Sesión 11. Sistemas de ecuaciones.	**Secuencia 3** Sesión 12. Los polígonos y sus ángulos internos.	**Secuencia 4** Sesión 13. Potencias y notación científica.	**Secuencia 4** Sesión 14. Triángulos congruentes.	**Secuencia 4** Sesión 15. Puntos y rectas notables del triángulo.
4	**Secuencia 4** Sesión 16. Eventos independientes.	**Secuencia 5** Sesión 17. Sistemas de ecuaciones.	**Secuencia 5** Sesión 18. Traslación, rotación y simetría central.	**Secuencia 5** Sesión 19. Representación gráfica de sistemas de ecuaciones.	**Secuencia 5** Sesión 20. Eventos mutuamente excluyentes.

Índice

Presentación

Conoce tu libro

SECUENCIA 1

08 SESIÓN 1. Multiplicaciones de números con signo

14 SESIÓN 2. Problemas aditivos con expresiones algebraicas

19 SESIÓN 3. La relación inversa de una relación de proporcionalidad directa

22 SESIÓN 4. Polígonos de frecuencias

SECUENCIA 2

26 SESIÓN 5. Multiplicaciones de polinomios

31 SESIÓN 6. División de polinomios

34 SESIÓN 7. Volumen de prismas y pirámides

39 SESIÓN 8. Medidas de tendencia central

SECUENCIA 3

42 SESIÓN 9. Sucesiones de números con signo

47 SESIÓN 10. Ecuaciones de primer grado

51 SESIÓN 11. Sistemas de ecuaciones

57 SESIÓN 12. Los polígonos y sus ángulos internos

SECUENCIA 4

61 SESIÓN 13. Potencias y notación científica

68 SESIÓN 14. Triángulos congruentes

74 SESIÓN 15. Puntos y rectas notables del triángulo

82 SESIÓN 16. Eventos independientes

SECUENCIA 5

86 SESIÓN 17. Sistemas de ecuaciones

93 SESIÓN 18. Traslación, rotación y simetría central

99 SESIÓN 19. Representación gráfica de sistemas de ecuaciones

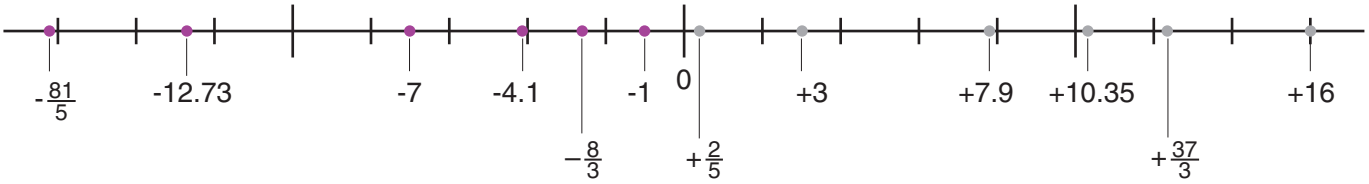
104 SESIÓN 20. Eventos mutuamente excluyentes

Sesión 1.

Multiplicaciones de números con signo

Propósito Resolverás problemas que impliquen sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números con signo.

Para empezar *Los números con signo son los números positivos y los números negativos*. El *cero* no tiene signo. Los *números positivos* se ubican a la derecha del cero en la recta numérica. Pueden aparecer con el signo + o sin él. Cuando llevan el signo + es porque se desea resaltar que son positivos. Por ejemplo: +3, +7.9, +10.35, +16. Los números *negativos* se ubican a la izquierda del cero en la recta numérica y siempre se escriben anteponiéndoles el signo –. Por ejemplo: 12.73, 7, 4.1, 1.



Cuando se hacen operaciones de *números con signo*, los números que tienen signo se escriben entre paréntesis para que no se confundan los signos de los números y los de la operación. Por ejemplo: (-4) + (+5) – (-15). Se puede escribir 5 en vez de +5 y entonces no son necesarios los paréntesis: (-4) + 5 – (-15)

Manos a la obra

Recuerden que:

Para realizar una *suma de varios números con signo* podemos sumar primero todos los números positivos, después todos los números negativos y por último sumar los resultados. Por ejemplo: ¿y los signos cómo se utilizan?
(-18) + 31 + (-24) = 31 + (-42) = -11.
(-15) + 11 + (-8) + 28 = 39 + (-23) = 16.

Responde:

1. Una sustancia química que está a una temperatura de 5 °C se calienta en un mechero hasta que alcanza una temperatura de 12 °C.
¿Cuántos grados subió la temperatura de la sustancia? _____

2. Resuelve las siguientes sumas:
   a) (-8) + (-15) =
   b) (-47) + (-12) + (-33) =
   c) 14 + (-25) + (-39) + 32 =

3. Resuelve las siguientes restas:
   a) (-31) – 14 =
   b) 46 – (-10) =
   c) (-2) – (-65) =

Los números tienen su origen en la necesidad de contar y de medir. Los primeros números que fueron utilizados son los llamados números naturales:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12...

Al conjunto formado por los números naturales, los simétricos de los números *naturales* y el cero, se le llama conjunto de los números *enteros*:
...-4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4...

Multiplicaciones de números con signo
Consideremos lo siguiente

Las siguientes tablas son parte de las tablas de multiplicar del 4 y del 6. Completa los resultados:

4 × 6 =	24
4 × 5 =	20
4 × 4 =	16
4 × 3 =	
4 × 2 =	
4 × 1 =	
4 × 0 =	0
4 × (-1) =	
4 × (-2) =	
4 × (-3) =	
4 × (-4) =	
4 × (-5) =	
4 × (-6) =	
4 × -7) =	

6 × 6 =	36
6 × 5 =	30
6 × 4 =	24
6 × 3 =	
6 × 2 =	
6 × 1 =	
6 × 0 =	
6 × (-1) =	
6 × (-2) =	
6 × (-3) =	
6 × (-4) =	–24
6 × (-5) =	
6 × (-6) =	
6 × (-7) =	

Comenten en equipo los procedimientos que siguieron para llenar las tablas.

I. Observa las tablas y responde las preguntas:
a) ¿Cuánto se resta para pasar del resultado de 4 × 5 al resultado de 4 × 4?
b) ¿Cuánto se resta para pasar del resultado de 4 × 1 al resultado de 4 × 0?
c) Para pasar del resultado de 4 × 0 al resultado de 4 × (-1), se resta lo mismo. ¿Cuánto es 4 × (-1)?
d) ¿Cuánto se resta entre dos renglones consecutivos de la tabla del 6?
e) ¿Cuánto es 6 × (-2)?
Comparen sus respuestas.

II. Multiplicar 4×2 es lo mismo que sumar cuatro veces 2:

$4 \times 2 = \underbrace{2 + 2 + 2 + 2}_{\text{Se suma cuatro veces 2.}} = 8$

Expresa la multiplicación como sumas:

$5 \times 3 = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Se suma } _____ \text{ veces 3.}} =$

III. Cuando en una multiplicación el primer factor es un número entero positivo y el segundo factor es un número negativo, también se hace una suma repetida, por ejemplo:

$2 \times (-5) = (-5) + (-5) = -10$. Se suma dos veces -5.

Expresa las siguientes multiplicaciones como sumas repetidas y encuentra el resultado:

a) $3 \times (-8) = (\ ___\ ) + (\ ___\ ) + (\ ___\ ) =$ _____

b) $x \times (-11) = (-11) + (-11) + (-11) + (-11) =$ _____

c) $5 \times (\quad) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) =$ _____

En equipos comparen sus respuestas y comenten:

En otro grupo encontraron el resultado de $6 \times (-7)$ diciendo que $6 \times 7 = 42$ y que, entonces, $6 \times (-7) = -42$. ¿Están de acuerdo con este procedimiento? ¿Cómo usarían este procedimiento para encontrar el resultado de $4 \times (-1.2)$ y de $6 \times (-\ )$?

IV. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $8 \times (-10) =$ _____

b) $12 \times (-4) =$ _____

c) $7 \times (-5.8) =$ _____

A lo que llegamos

Cuando en una multiplicación el primer factor es un número entero positivo y el segundo es negativo, el número negativo se suma varias veces.

Por ejemplo:

$5 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -20$.

Se suma cinco veces 4

Para encontrar el resultado de una multiplicación de este tipo se multiplican los valores absolutos de los números y al resultado se le antepone el signo –. Por ejemplo:

$6 \times (-3) = -18$

Se hace la multiplicación $6 \times 3 = 18$, se le antepone el signo –, y el resultado es 18.

Asimismo, cuando en una multiplicación el primer factor es un número negativo y el segundo factor es un número entero positivo, se multiplican los valores absolutos de los números y al resultado se le antepone el signo –. Por ejemplo:

$(-8) \times 2 = 16$

Se hace la multiplicación $8 \times 2 = 16$, se le antepone el signo –, y el resultado es 16.

Ejercicios:
Completa la expresión de cada una de las siguientes multiplicaciones como una suma y encuentra el resultado.

a) 4 × _____ = ___ + ___ + ___ + = 32.
b) 8 × 0 = _____ =
c) x × (-2) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = _____

La regla de los signos 1

Cuando se multiplican números con signo se utiliza la regla de los signos. En esta sesión vas a conocer y a utilizar esta regla.

Consideremos lo siguiente

Encuentra los resultados que hacen falta en la siguiente tabla y anótalos.

×	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*	*-1*	*-2*	*-3*	*-4*
4	16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16
3	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12
2	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8
1	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1					0				
-2					0				
-3					0				
-4					0				

En equipos comparen sus respuestas. Comenten cómo van cambiando los resultados en cada renglón y en cada columna.

I. Observa las tablas y responde las preguntas:
a) ¿Cuánto se suma para pasar del resultado de 4 × (-3) al resultado de 3 × (-3)? _____
b) ¿Cuánto se suma para pasar del resultado de 1 × (-3) al resultado de 0 × (-3)? _____
c) Entre dos resultados consecutivos de la tabla del (-3) siempre se suma lo mismo. ¿Cuánto es (-1) × (-3)? _____

II. Responde las siguientes preguntas:
a) En la tabla del (-1), para pasar de un resultado al siguiente ¿se suma o se resta? ¿Cuánto se suma o cuánto se resta? _____
b) En la tabla del 1, para pasar de un resultado al siguiente ¿se suma o se resta? ¿Cuánto se suma o cuánto se resta? _____
c) En la tabla del (-4), ¿cuánto se suma o cuánto se resta para pasar de un resultado al siguiente? _____

Compar tus respuestas con las de tus compañeros.

III. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) 7 × (-2) =
b) (-3) × (-6) =
c) 3 × (-15) =

A lo que llegamos

Para multiplicar números con signo se multiplican los valores absolutos de los números y luego se determina el signo del resultado utilizando *la regla de los signos para la multiplicación:*

Positivo por positivo el resultado es positivo.
Positivo por negativo el resultado es negativo.
Negativo por positivo el resultado es negativo.
Negativo por negativo el resultado es positivo.

Por ejemplo, para multiplicar

(-4) × 11

primero se multiplica:

4 × 11 = 44

de acuerdo con la regla de los signos sabemos que el resultado es negativo.

(-4) × 11 = -44.

La regla de los signos 2

La regla de los signos también se utiliza para hacer divisiones entre dos números con signo.

Consideremos lo siguiente

Completa los datos y los resultados que faltan en las siguientes multiplicaciones:

×	*7*	*-4*	*-12*
2	14	-8	-24
-4		16	
	35		
	-56		
		-52	
	-105		
			216

Compara tus respuestas con tus compañeros y comenten qué hicieron para encontrar el signo de los números que faltaban.

I. Respondan las siguientes preguntas:

a) Un número multiplicado por 17 da como resultado 204, ¿cuál es la operación que se puede hacer para encontrar ese número? _____
b) ¿Cuál es el número que buscamos? _____
c) Esto es cierto porque: _____ × 17 = 204.
d) Para encontrar el número que multiplicado por -8 da como resultado 184, ¿cuál es la operación que se puede hacer? _____
e) ¿Cuál es el número que buscamos? _____
f) Esto es cierto porque: × (-8) = 184.

II. En la siguiente tabla se presentan algunos problemas. Complétenla:

Problema	División que se hace para encontrar el número	Verificación
¿Cuál es el número que al multiplicarlo por 3 da –78?	(-78) ÷ 3 = _____	_____ × 3 = 78
¿Cuál es el número que al multiplicarlo por –9 da 171?		
¿Cuál es el número que al multiplicarlo por _____ da _____?	(-75) ÷ (-25) = _____	_____ × _____ = -75

III. Encuentra el resultado de las siguientes divisiones:

a) 12 ÷ (-6) = _____

b) (-44) ÷ (-4) = _____

c) (-16) ÷ (-8) = _____

En equipos comparen sus respuestas. Comenten qué hicieron para encontrar el signo de los resultados.

A lo que llegamos

Para hacer divisiones entre números con signo se dividen los valores absolutos de los números y luego se encuentra el signo del resultado utilizando la regla de los signos para la división:

Positivo entre positivo el resultado es positivo.
Positivo entre negativo el resultado es negativo.
Negativo entre positivo el resultado es negativo.
Negativo entre negativo el resultado es positivo.

Por ejemplo, para dividir

(-110) ÷ (-5)

primero se divide:

110 ÷ 5 = 22

de acuerdo con la regla de los signos, sabemos que el resultado es positivo.

(-110) ÷ (-5) = 22.

IV. Cuando se dividen fracciones o números decimales con signo, también se utiliza la regla de los signos. Realicen las siguientes operaciones:

a) (-7.4) ÷ 2 =

b) (-10) ÷ (-)=

c) (-) ÷ (-) =

Ejercicio:

Realiza las siguientes operaciones:

a) (-9) × 0 =

b) (-1) × 17 =

c) 1 × (-29) =

Sesión 2.

Problemas aditivos con expresiones algebraicas

Propósito Resolverás problemas de adición y sustracción de expresiones algebraicas.

Para empezar

Consideremos lo siguiente

Don Lencho es granjero y construirá un gallinero de forma rectangular. El técnico avícola de la región le ha recomendado que el largo del gallinero mida el doble del ancho. Para determinar las dimensiones del gallinero, don Lencho puede elegir entre muchas opciones que cumplen la recomendación anterior.

Si el número de metros que tiene el ancho se representa con la letra *a*, escribe una expresión algebraica que represente el perímetro del gallinero.
Perímetro = _____

En equipos comparen sus expresiones algebraicas. Comenten:
¿Cuál es el perímetro del gallinero si el ancho mide 1 metro?
_____

I. Completa la siguiente tabla para ayudar a don Lencho a decidir el tamaño del gallinero.

Medida en metros del ancho	Medida en metros del largo	Operaciones que se realizan para calcular el perímetro del gallinero	Perímetro del gallinero en metros
1	2		6
$1\frac{1}{2}$			
2	4		12
3			
	8		
4.5			27
			48
a			

Compara con tus compañeros sus tablas. Verifiquen sus respuestas dibujando en su cuaderno los rectángulos correspondientes (utilicen una escala de 1 cm = 1 m). Comenten:

a) ¿Qué operación hicieron para obtener la medida del largo del gallinero cuando a representa la medida del ancho en metros? _____

b) ¿Qué operaciones hicieron para obtener el perímetro del gallinero cuando a representa la medida del ancho en metros?

_____

II. Contesta lo siguiente:

a) En las siguientes expresiones algebraicas la letra a representa el número de metros que tiene el ancho del gallinero. Subraya las expresiones que, al sumarse, permiten obtener el perímetro. ¡Cuidado, puede haber más de una que sea correcta!

$a + a + a$
$a + a + 2a + 2a$
$a + a + a + a + a + a$
$3a + 3a$

b) El resultado de la suma $a + a$ es $2a$, o sea, 2 veces a. Completa el siguiente esquema para encontrar el resultado de la suma $a + a + 2a + 2a$.

$$a + a + 2a + 2a =$$

$$a + a + (a + a) + (a + a)$$

c) ¿Cuántas veces aparece a en la expresión $a + a + (a + a) + (a + a)$?
Comenten en grupo las soluciones que obtuvieron.

A lo que llegamos

En una suma de expresiones algebraicas los sumandos se llaman *términos*. Por ejemplo, a y $2a$ son términos de la suma $a + a + 2a + 2a$

Los términos tienen *coeficiente, literales* y *exponentes*.

Recuerda que: el exponente es la potencia a la que se eleva un término.

El término $2a$ tiene:

Coeficiente: 2 Literal: a Exponente: 1

El término a tiene:

Coeficiente: 1 Literal: a Exponente: 1

El término $3a^2$ tiene:

Coeficiente: 3 Literal: a Exponente: 2

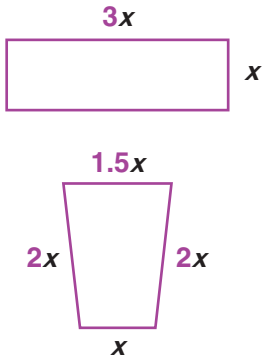
A los términos que tienen la misma literal con igual exponente como a, $3a$, $2a$, $1.5a$, se les llama *términos semejantes*.

Los términos numéricos son semejantes entre sí.

Por ejemplo, 8 y -5 son términos semejantes.

Aunque los términos $3a^2$ y $2a$ tienen la misma literal no son semejantes porque sus exponentes son distintos.

III. El hijo de don Lencho le presentó otros diseños para construir el gallinero. Une con una línea cada figura con la expresión que representa su perímetro.



$8x$

$6x$

$4.5x$

$6.5x$

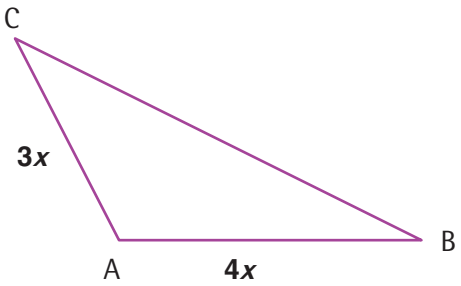
En equipos comparen las soluciones que obtuvieron. Comenten:
¿Cómo sumar términos semejantes cuando los coeficientes son decimales?

A lo que llegamos

Para sumar términos semejantes se suman los coeficientes y se conserva la parte literal. Por ejemplo:

$5.2 + 7.3 = 12.5$ $\qquad$ $5.2x + 7.3x = 12.5x$

IV. El perímetro del triángulo ABC es $13x$.



¿Cuál es la medida del lado BC?
Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenten:
¿Qué operación hicieron para encontrar la medida del lado BC?

A lo que llegamos

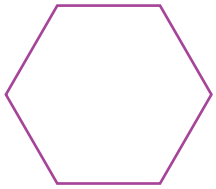
Para restar términos semejantes se restan los coeficientes y se conserva la parte literal. Por ejemplo:

$7 - 4 = 3$ $\qquad$ $7x - 4x = 3x$

Resuelve lo siguiente:

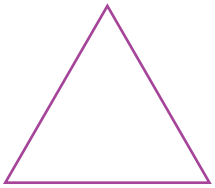
1. El ancho de un rectángulo es $15x$, y el largo tiene la medida del ancho más $3x$. Dibuja en tu cuaderno el rectángulo con la medida de sus lados y escribe la expresión que corresponde a su perímetro.

2. Escribe la expresión del perímetro de los siguientes polígonos regulares.



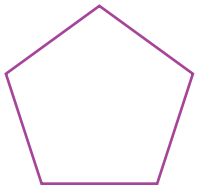
2*x*

P = _____



1.2*z*

P = _____



2.4*y*

P = _____

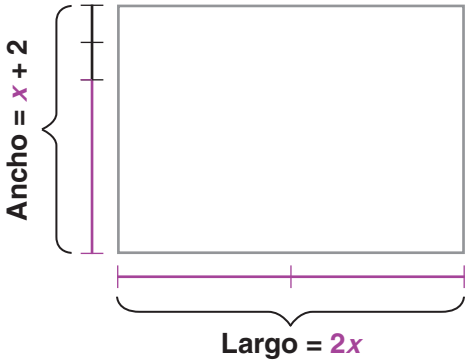
A medir contornos

Llamamos *binomios* a las expresiones algebraicas con dos términos, como las siguientes:

$$x + z$$
$$y - 53$$
$$2x^2 + 7$$

Consideremos lo siguiente

En el rectángulo se han determinado las medidas de la base y la altura:



a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el perímetro del rectángulo? _____

_____

Compara tus respuestas con tus compañeros y comenten:

b) ¿Cómo obtuvieron el perímetro del rectángulo? _____

I. ¿Cuáles de las siguientes expresiones permiten encontrar el perímetro del rectángulo anterior? Subráyenlas.

$x + 2 + 2x$
$2x + 2x + (x + 2) + (x + 2)$
$2x + (x + 2) + 2x + (x + 2)$
$(3x + 2) + (3x + 2)$

Contesta las siguientes preguntas.

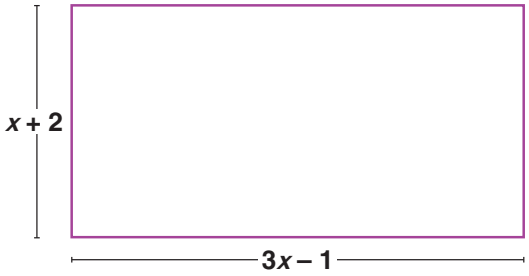
a) Para hacer la suma $2x + 2x + (x + 2) + (x + 2)$ se suman los términos semejantes.

Completa:

$2x + 2x + (x + 2) + (x + 2) =$ _____ + _____

$2x + 2x + x + x =$ _____ $\quad 2 + 2 =$ _____

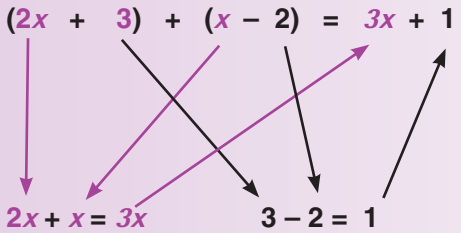
II. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el perímetro del siguiente rectángulo?



n Suma los términos semejantes y verifica si obtienes los mismos resultados que tus compañeros.

A lo que llegamos

Para sumar binomios se suman los términos que son semejantes.



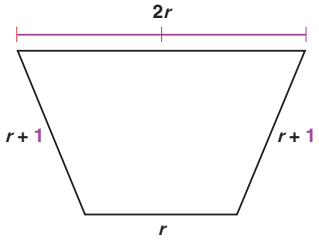
Ejercicios:

1. La altura de un rectángulo es x, y la base es 5 unidades mayor que la altura. Dibuja en tu cuaderno el rectángulo con la medida de sus lados y escribe la expresión que corresponde a su perímetro. Recuerda sumar los términos semejantes.

$P =$ _____

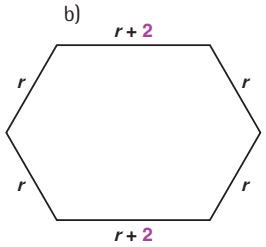
2. Escribe la expresión que corresponde al perímetro de cada polígono. Recuerda sumar los términos semejantes.

a)



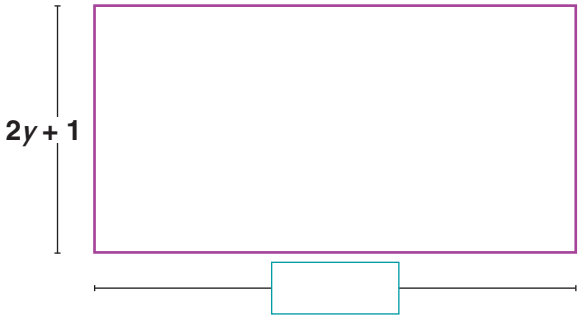
Perímetro: _____

b)



Perímetro: _____

3. El perímetro del rectángulo es $10y + 6$.
¿Cuál es la medida del largo?



Sesión 3.

La relación inversa de una relación de proporcionalidad directa

Propósito Determinarás la relación inversa de una proporcionalidad directa.

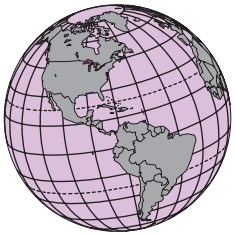
Para empezar El peso de un objeto varía en función de la fuerza de gravedad que actúa sobre él. Esto significa que un objeto no pesa lo mismo en la Tierra que en la Luna o Marte. Por lo que, los objetos y su peso en un planeta, en otro son cantidades directamente proporcionales; por ejemplo, un objeto que en la Tierra pesa 4 kg, en Júpiter pesa 10 kg. ¿Cuánto pesa en Júpiter un objeto que en la Tierra pesa 12 kg?

En esta sesión descubrirás cómo encontrar el peso de un mismo objeto en distintos planetas y satélites del Sistema Solar.

Manos a la obra

Consideremos lo siguiente

La siguiente tabla muestra los distintos pesos que una misma barra de plomo tiene en la Tierra y en la Luna:



Peso de la barra de plomo	
Peso en la Tierra (en kilogramos)	Peso en la Luna (en kilogramos)
720	120

Con la información de la tabla anterior respondan en equipos de cuatro personas lo siguiente:

a) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite encontrar el peso de un objeto en la Luna a partir de su peso en la Tierra? _____

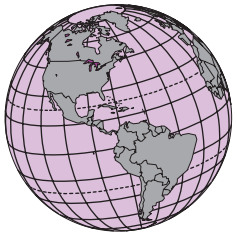
b) Si una barra de plomo pesa en la Tierra 18 kilogramos, ¿cuántos pesará en la Luna? _____

c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite encontrar el peso de un objeto en la Tierra a partir de que se conoce cuál es éste en la Luna? _____

d) Si una barra de plomo pesa en la Luna 25 kilogramos, ¿cuántos kilogramos pesa en la Tierra? _____

Comparen sus respuestas y comenten:
¿Cuántas veces es más pesado un objeto en la Tierra que en la Luna?

I. Completa la siguiente tabla para encontrar el peso de algunas barras de plomo en la Luna conociendo su peso en la Tierra.

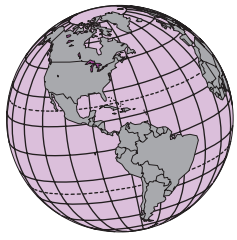


Peso en la Tierra (en kilogramos)	Peso respectivo en la Luna (en kilogramos)
720	120
72	
12	
1	
18	

Observen que al encontrar cuánto pesa en la Luna un objeto que pesa 1 kg en la Tierra, se encuentra también la constante de proporcionalidad que permite saber el peso de un objeto en la Luna conociendo su peso en la Tierra.

II. Completa la siguiente tabla para encontrar el peso de algunas barras de plomo en la Tierra conociendo su peso en la Luna.

Peso en la Luna (en kilogramos)	Peso en la Tierra (en kilogramos)
120	720
60	
10	
1	
25	



Compara tus respuestas con tus compañeros y verifiquen sus resultados con los del apartado "A lo que llegamos".

III. Completa el siguiente diagrama y comenten la relación que hay entre las constantes que utilizaron.

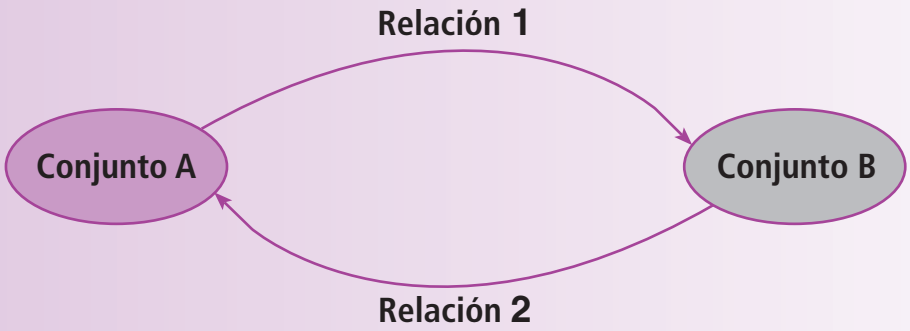
Se multiplica por la constante de proporcionalidad, que es: _____

o se divide entre: _____

Se multiplica por la constante de proporcionalidad, que es: _____

A lo que llegamos

Cuando dos conjuntos de cantidades son directamente proporcionales, siempre hay en juego dos relaciones de proporcionalidad. El siguiente diagrama ilustra esta situación.



La relación 1 permite encontrar las cantidades del conjunto B a partir de las cantidades del conjunto A. La relación 2, al revés, permite encontrar las cantidades del conjunto A, a partir de las cantidades del conjunto B. Se dice que estas dos relaciones son inversas una de la otra.

Además, las constantes de proporcionalidad asociadas a estas dos relaciones son recíprocas una de la otra.

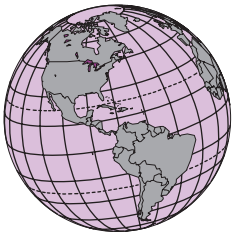
Por ejemplo, $\frac{1}{6}$ *es la constante de proporcionalidad* que permite encontrar el peso en la Luna a partir del peso en la Tierra. Mientras que *6 es la constante de proporcionalidad* que permite conocer el peso en la Tierra a partir del peso en la Luna.

Estas dos relaciones son inversas y sus constantes de proporcionalidad son recíprocas.

6 y $\frac{1}{6}$ son recíprocos porque $6 \times \frac{1}{6} = 1$

Ejercicio:

La siguiente tabla muestra los distintos pesos que una barra de plomo tiene en la Tierra y en Venus:



Peso de la barra de plomo	
Peso en la Tierra (en kilogramos)	Peso en Venus (en kilogramos)
720	648

Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite encontrar el peso de los objetos en Venus a partir de conocer su peso en la Tierra? _____

b) Si una barra de plomo pesa 1 kilogramo en la Tierra, ¿cuánto pesa esa barra en Venus? _____

c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite encontrar el peso de los objetos en la Tierra a partir de conocer su peso en Venus? _____

d) Si una barra de plomo pesa 1 kilogramo en el planeta Venus, ¿cuánto pesa esa barra en la Tierra? _____

Sesión 4.

Polígonos de frecuencias

Propósito Aprenderás a interpretar y a comunicar información mediante polígonos de frecuencias.

Para empezar

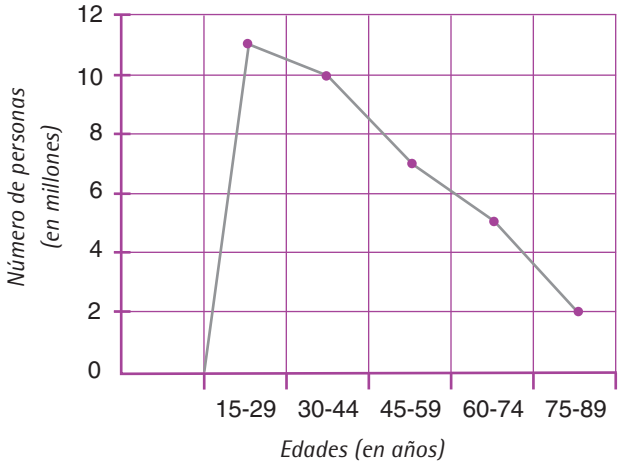
Rezago educativo y gráficas

Consideremos lo siguiente

Desde 1993 la educación básica obligatoria comprende hasta la secundaria completa. Cuando una persona tiene más de 15 años y está en alguna de las siguientes situaciones: no sabe leer ni escribir, no terminó de estudiar la primaria, únicamente estudió la primaria o no terminó de estudiar la secundaria, se considera que esa persona se encuentra en *rezago educativo*.

La siguiente gráfica es un *polígono de frecuencias*. En ella se presentan los datos que se obtuvieron en el censo del año 2000 acerca de la población mexicana que se encuentra en rezago educativo.

Población mexicana de 15 años y más en condición de rezago educativo en el año 2000



a) En el intervalo de entre 15 y 29 años de edad hay 11 millones de personas que están en condición de rezago educativo. ¿Cuántas personas de 30 a 44 años están en esa condición? _____

b) Toma en cuenta la información que presenta el polígono de frecuencias y anota **V** o **F** según sean verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

( ) El intervalo de edad con mayor cantidad de personas en condición de rezago educativo es el de 15 a 29 años.

( ) En el año 2000, alrededor de 35 millones de personas se encontraban en condición de rezago educativo.

( ) Si la población total en México era de 97.5 millones, aproximadamente el 36% de las personas estaban en condición de rezago educativo.

Manos a la obra

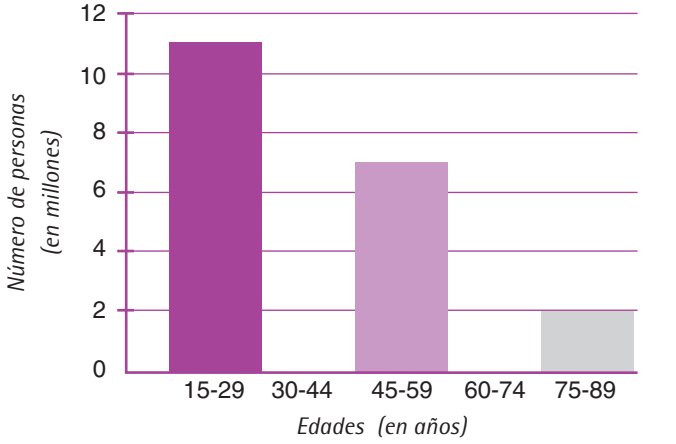
I. Contesta las siguientes preguntas tomando en cuenta el polígono de frecuencias.

a) ¿Cuántos intervalos de edad hay? ¿Cuántas edades comprende cada intervalo? ¿Todos los intervalos son del mismo tamaño? _____

b) La frecuencia en el intervalo de entre 15 y 29 años de edad es de 11 millones de personas que están en condición de rezago educativo, ¿en qué intervalo la frecuencia es de 5 millones de personas que están en esa condición? _____

c) Si en el intervalo de entre 45 y 59 años de edad hay 7 millones de personas que están en condición de rezago educativo, ¿podrías decir cuántas personas de 50 años de edad hay en esa condición? _____

Población mexicana de 15 años y más en condición de rezago educativo en el año 2000



Fuente: INEGI. XII Censo General de Población y Vivienda, 2000. Base de datos.

d) Esta gráfica es un *histograma*. ¿Las alturas de las barras son iguales o diferentes? _____ ¿Qué indican? _____

e) Compara el tamaño del ancho de las barras, ¿son iguales o diferentes? _____

¿Por qué crees que ocurre eso? _____

Ahora, calca el histograma en una hoja de papel delgado y coloca la copia sobre el polígono de frecuencia del apartado "Consideremos lo siguiente".

f) ¿Qué puntos del polígono de frecuencias quedan cubiertos con las barras del histograma? _____

g) ¿En qué parte de las barras quedan los puntos del polígono de frecuencias? _____

En el histograma que calcaste dibuja el polígono de frecuencias. Considera el primer punto del polígono de frecuencias, que es el punto medio del segmento superior de la primera barra, y traza, a partir de él, un segmento vertical. Este segmento divide por la mitad al intervalo 15-29 años de edad. Traza los segmentos que faltan para los otros puntos del polígono de frecuencias. Cuida que las barras del histograma queden divididas en dos partes iguales: los puntos del polígono de frecuencias quedan sobre la mitad de la parte superior de cada barra, es decir, *a la mitad de cada "techo de las barras"*.

A lo que llegamos

Los histogramas se utilizan para presentar información que contiene datos organizados en intervalos del mismo tamaño.

Un histograma tiene las siguientes características importantes:

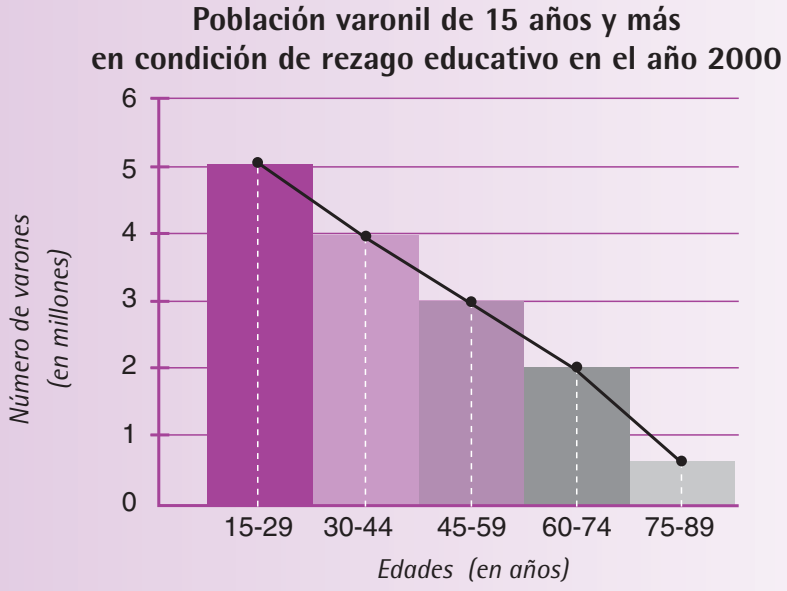
- La altura de una barra está determinada por la frecuencia del intervalo correspondiente.
- La anchura de las barras es igual para cada una debido a que esta medida representa el tamaño de cada intervalo.
- Las barras se dibujan sin dejar espacios entre ellas porque abarcan todo el intervalo correspondiente a los datos agrupados.

Un polígono de frecuencias de datos organizados en intervalos, es la gráfica que se obtiene al unir, mediante una línea poligonal, los puntos medios consecutivos de los techos de las barras.

Éstas nos permiten observar de manera general la tendencia de los datos.

Sin embargo, es incorrecto darle significado a la línea que une a los puntos medios, ya que sólo estamos representando la frecuencia por intervalo y no para cada valor del intervalo.

Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra a la población varonil de 15 años y más en condición de rezago educativo en el año 2000 en México; como podemos ver, en el intervalo de 15 a 29 años de edad hay 5 millones de varones en total, pero no sabemos cuántas personas hay de 15, 16, 17... o 29 años de edad.



Tanto en los histogramas como en los polígonos de frecuencias se pueden representar frecuencias absolutas, relativas o porcentajes.

II. En la siguiente tabla de frecuencias se presenta el número de personas de 15 años y más que habitan en México. Complétala con los datos que se dan en el polígono de frecuencias visto anteriormente.

Población total y de personas en condición de rezago educativo en México en el año 2000.

Edades	Número total de personas (en millones)	Número de personas en condición de rezago educativo (en millones)	Porcentaje de personas en condición de rezago educativo por grupo de edad
15-29	28	11	$(11 \div 28) \times 100 = 39.2$
30-44	20		
45-59	10		
60-74	6		
75-89	2		
Total	66		

a) En el año 2000 había 11 millones de personas entre 15 y 29 años de edad con rezago educativo. ¿Qué fracción representa de la población total de ese intervalo de edad? _____ ¿Qué porcentaje representan? _____

b) ¿Cuántas personas de 15 años y más había en México en el año 2000?

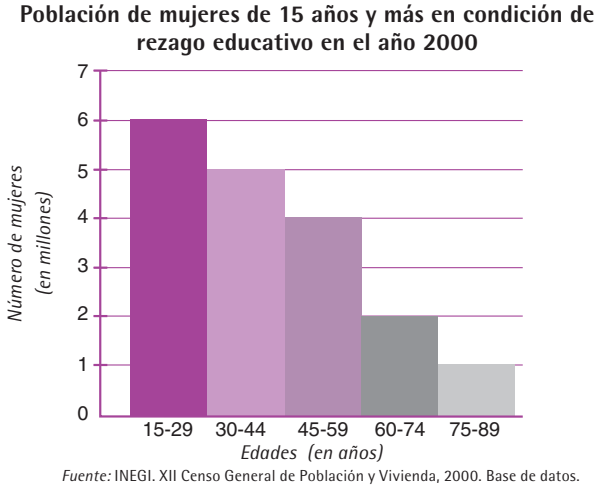
_____

c) ¿Y cuántas personas de 15 años y más estaban en condición de rezago educativo?

_____

Ejercicio:

1. Construye el polígono de frecuencias que corresponde al siguiente histograma.



Fuente: INEGI. XII Censo General de Población y Vivienda, 2000. Base de datos.

a) ¿Cuántas mujeres de entre 30 y 44 años se encuentran en rezago educativo?

_____

b) En tu cuaderno, elabora la tabla de frecuencias que permitió construir el histograma.

c) Si la población total de mujeres entre 30 y 44 años era de 10 millones de personas, ¿qué porcentaje representa la población de mujeres que se encuentra en rezago educativo en ese intervalo? _____

Sesión 5.

Multiplicaciones de polinomios

Propósito

Resolverás problemas multiplicativos que impliquen el uso de expresiones algebraicas.

Para empezar

Las expresiones algebraicas más simples se llaman *monomios*, por ejemplo, $2x^3$, $6y$, $-4mn^3$, $-8x^2y^6$

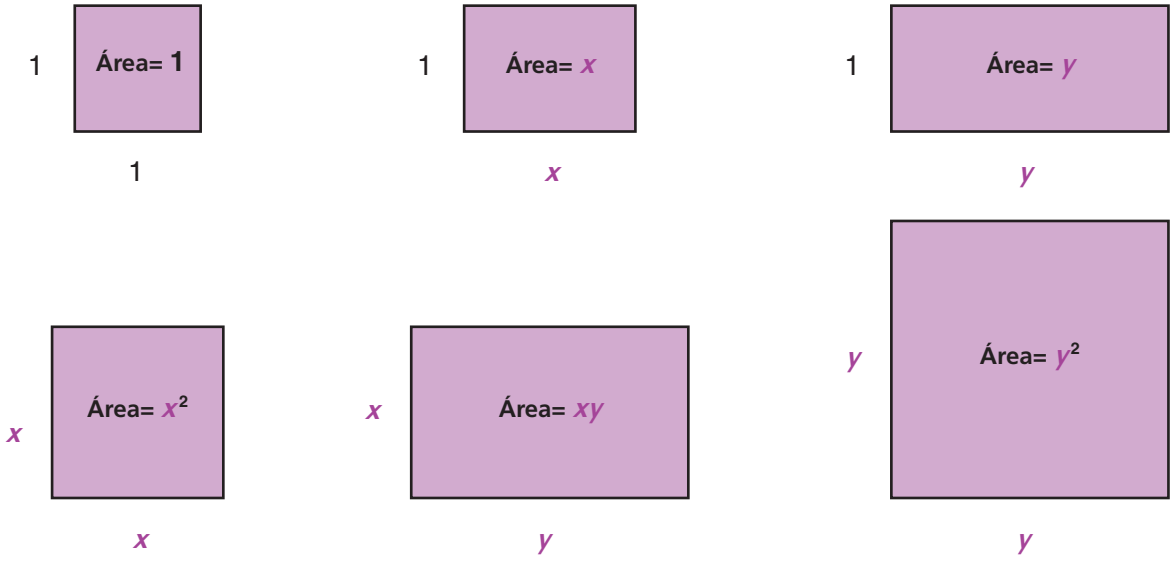
Cada monomio tiene signo, coeficiente, literal o literales y exponente o exponentes. Al unir dos monomios en una expresión algebraica se obtiene un *binomio* y si se unen tres o más monomios se tiene un *polinomio*:

Binomio: $2x^3 + 6y$

Polinomio: $6y - 4mn^3 + 8x^2y^6$

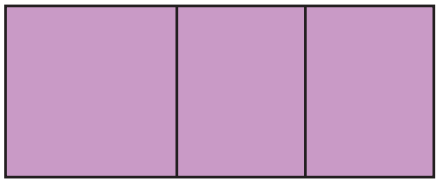
Los bloques algebraicos

Los *bloques algebraicos* son piezas de forma rectangular o cuadrada que permiten modelar operaciones con expresiones algebraicas. En esta sesión ocuparás los siguientes bloques, cada uno de ellos tiene un área que se representa con una expresión algebraica: 1, x, x^2, y, xy, y^2.



Manos a la obra

Une con una línea cada rectángulo con el binomio que corresponda a su área.

Rectángulo	Área
	$y + 1$
	$x + 1$
	$x^2 + 2x$
	$xy + x$

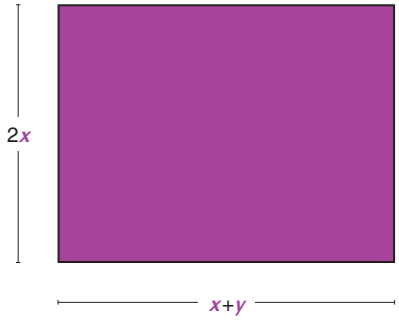
En equipos comparen sus soluciones.

Consideremos lo siguiente

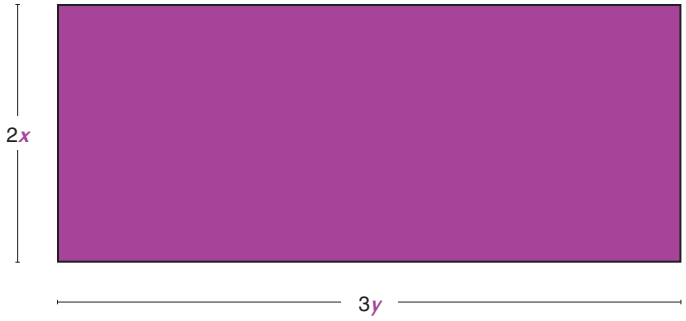
Los siguientes rectángulos se han formado usando los *bloques algebraicos*.

A

B



C



¿Qué expresión algebraica corresponde al área de cada rectángulo?

a) Rectángulo A: Área = _____

b) Rectángulo B: Área = _____

c) Rectángulo C: Área = _____

Comparen sus soluciones.

Manos a la obra

I. ¿Qué *bloques algebraicos* se usan para construir cada rectángulo? Para responder esta pregunta, completa la tabla.

Rectángulo	Base	Altura	Base × Altura	Expresión algebraica para el área
A	$3x$	$2x$	$(3x) \times (2x)$	
B	$x + y$	$2x$		
C	$3y$	$2x$		

a) ¿Cuántos *bloques algebraicos* de área x^2 se requieren para formar el rectángulo A?

_____

b) ¿Cuántos *bloques algebraicos* de área x^2 se usan para formar el rectángulo B?

_____

c) ¿Cuántos *bloques algebraicos* de área xy se usan para formar el rectángulo B?

_____

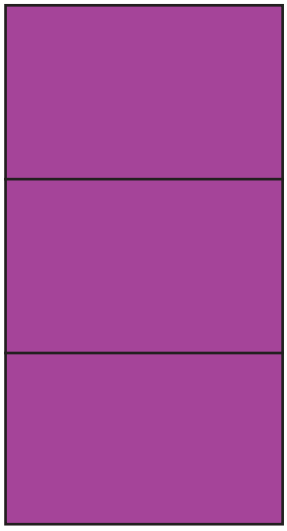
d) ¿Cuántos *bloques algebraicos* de área xy se necesitan para formar el rectángulo C?

_____

En equipos comparen sus soluciones.

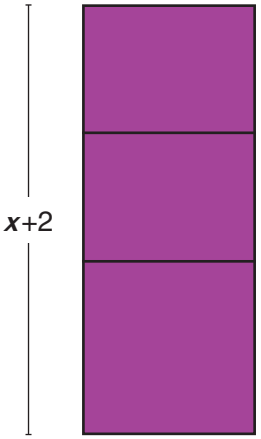
II. Los siguientes rectángulos también se construyeron usando los *bloques algebraicos*.

RECTÁNGULO D



RECTÁNGULO E

RECTÁNGULO F



a) Completa la tabla para encontrar las expresiones algebraicas que corresponden a las áreas de los rectángulos anteriores.

Rectángulo	Base	Altura	Base × Altura	Expresión algebraica para el área
D		$3x$	$(y) \times (\quad)$	
E	$y + 1$		$(y + 1) \times (\quad)$	
F	x		$x \times (\quad)$	

A lo que llegamos

Para multiplicar expresiones algebraicas existen algunas reglas que pueden servir:

1. Para multiplicar un término numérico por un monomio se multiplica el término numérico por el coeficiente del monomio, por ejemplo:

$$(3) \times (2y) = 3\,(2y) = \underbrace{(2 \times 3)}_{6}\,(y) = 6y$$

2. Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes y se multiplican las partes literales, por ejemplo:

$$(2x) \times (3x) = \underbrace{(2 \times 3)}_{6}\,\overbrace{(xx)}^{x^2} = 6x^2$$

3. Para multiplicar un monomio por un binomio se multiplica el monomio por cada uno de los términos del binomio, por ejemplo:

$$x\,(2x + y) = 2x^2 + xy$$

Las reglas anteriores también se aplican para multiplicar expresiones algebraicas con cualquier tipo de coeficientes: fraccionarios, negativos o decimales, por ejemplo:

$$\tfrac{1}{2}x\left(2x - 5y - \tfrac{3}{4}\right) = x^2 - \tfrac{5}{2}xy - \tfrac{3}{8}x$$

Ejercicios:

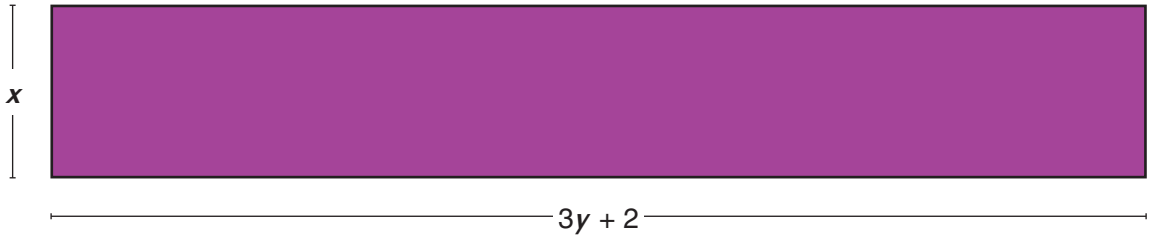
1. Realiza las siguientes multiplicaciones.

a) $\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{3}{4}xy\right)=$

b) $\left(\frac{-3}{5}y\right)(10x-15y)=$

c) $(-2.5xy)(5.2x+2.5y-1.2)=$

2. Calcula el área del siguiente rectángulo multiplicando las expresiones que representan las medidas de la base y la altura.



a) Área = $(3y + 2) \times (x) =$

b) Dibuja los bloques algebraicos necesarios sobre la figura anterior para verificar si el área obtenida mediante la multiplicación corresponde a los bloques utilizados para cubrirla.

3. Completa las siguientes multiplicaciones.

a) $(____)(5x)=15xy$

b) $(1.25z)(____)=-3.75yz$

c) $\left(\frac{-3}{5}\right)(____)=z$

Sesión 6.

División de polinomios

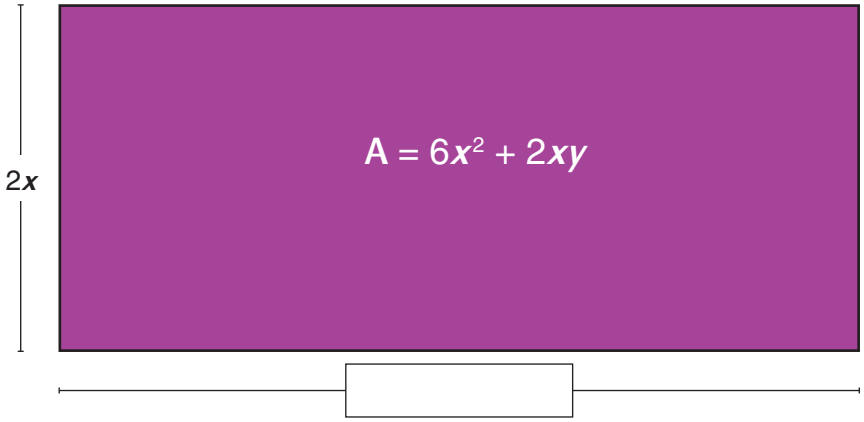
Propósito

Resolverás problemas de división que impliquen el uso de expresiones algebraicas.

Para empezar

¿Cuánto mide la base?

Consideremos lo siguiente: el área de un rectángulo es $6x^2 + 2xy$. Su altura mide $2x$.



a) ¿Qué expresión algebraica representa la medida de la base?

b) ¿Cuál es el perímetro del rectángulo? Perímetro =

Compara tus respuestas con tus compañeros y verifiquen la medida de la base a partir de la expresión:

Base × Altura = Área

Manos a la obra

I. Con los bloques algebraicos cubre el rectángulo de área $6x^2 + 2xy$. Después contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántos bloques de área x^2 hay en el rectángulo? _____

b) ¿Cuántos bloques de área xy hay en el rectángulo? _____

Compara tus respuestas y en grupo comenten:

Si conocen el área y la altura de un rectángulo, ¿qué operación hay que hacer para calcular su base? _____

II. Responde las siguientes preguntas.

a) Subraya la expresión que al multiplicarse por $2x$ resulte $4x^2 + 10x$.

$7x$ $\quad 2x^2 + 5$ $\quad 2x + 5x^2$ $\quad x + 5$

b) Multiplica la expresión que subrayaste por $2x$ y verifica si obtienes $4x^2 + 10x$.

$2x$ ( ) $= 4x^2 + 10x$

c) ¿Cuál es el resultado de la división?

$$\frac{4x^2+10x}{2x}$$

A lo que llegamos

Una manera de dividir el binomio $6x^2 + 2xy$ entre el monomio $2x$ consiste en buscar un binomio que multiplicado por $2x$ dé como producto $6x^2 + 2xy$.

$$\frac{6x^2+2xy}{2x} = 3x+y$$

Porque $2x\,(3x + y) = (2x)\,(3x) + (2x)\,(y) = 6x^2 + 2xy$

III. La regla anterior para dividir un binomio entre un monomio se aplica para dividir cualquier polinomio entre un monomio con coeficientes decimales, fraccionarios o negativos.

$$\frac{6.4z^2-1.6xz+7.2z}{0.8z} = 8z-2z+9z$$

Porque $0.8z\,(8z - 2x + 9) = 6.4z^2 - 1.6xz + 7.2$

Realiza las siguientes divisiones:

a)

$$\frac{6y^2 - 12yz+9z}{3z} =$$

Porque $3y\,(2y-4x+3) = 6y^2 - 12xy + 9y$

b)

$$\frac{\frac{3}{5}y^2z-3yz+2y}{\frac{2}{3}y}$$

porque $3y\,(2y-3x+\frac{5x}{3y}) = 6y^2-9xy+5x$

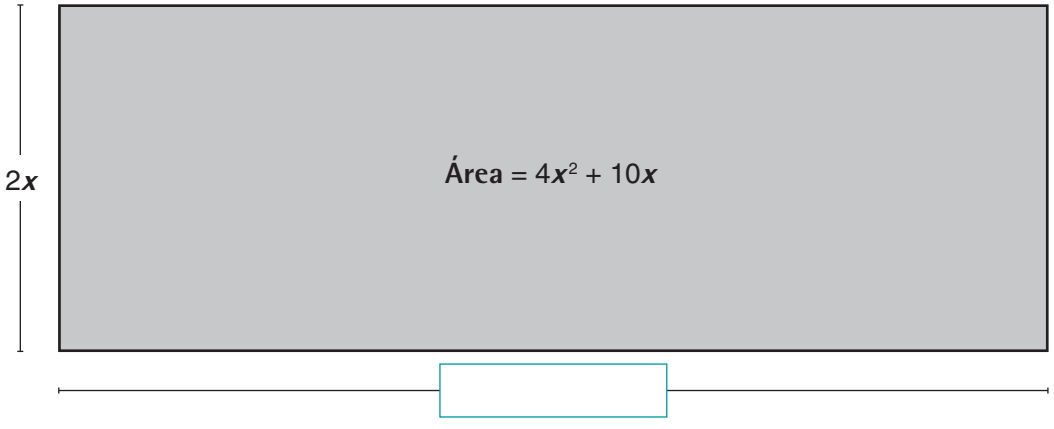
Realiza la siguiente división.

$$\frac{4y^2-12xy+5y}{3y}$$

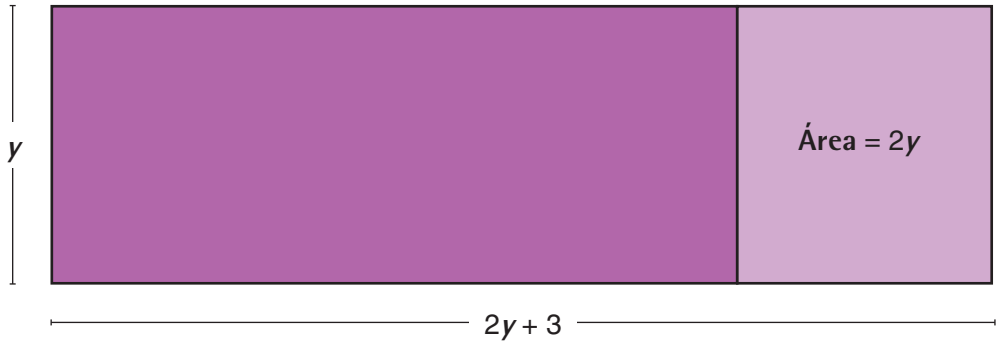
$$\frac{4y^2-12x+5y}{3y} = _____$$

Ejercicios:

1. Encuentra la expresión algebraica que corresponde a la base del rectángulo. Posteriormente calcula su perímetro.



2. Calcula el área de la figura que se forma al unir el rectángulo A con el B. El área del rectángulo B es $2y$.



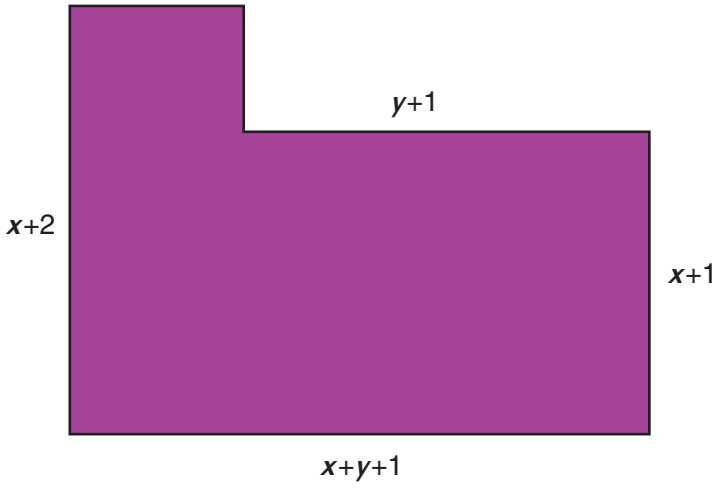
a) ¿Qué operación realizas para obtener el área del rectángulo formado al unir los rectángulos A y B? _____

b) ¿Qué área obtuviste? Área = _____

c) Realiza las operaciones que consideres para completar la tabla siguiente:

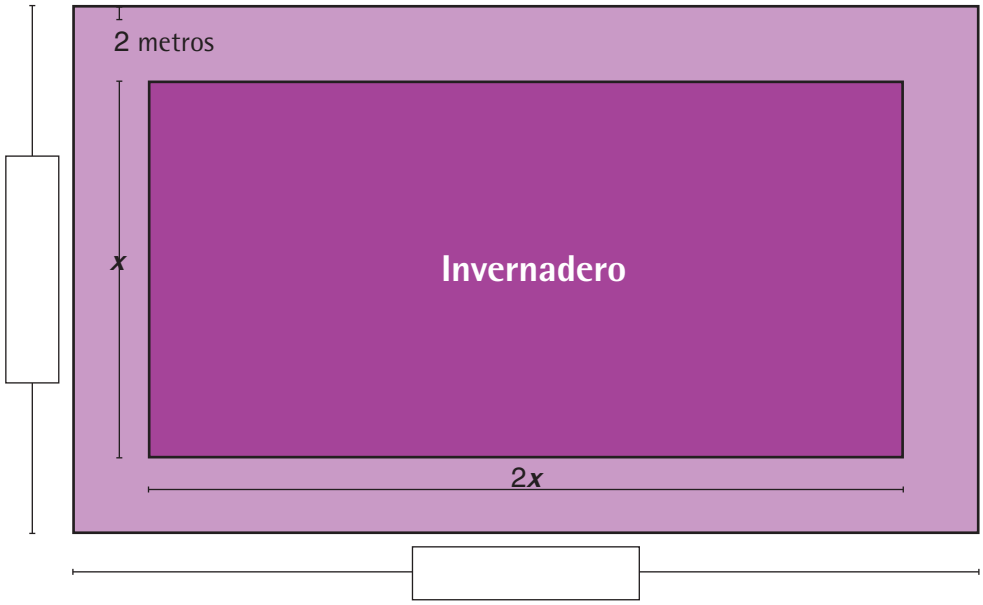
Rectángulo	Base	Altura	Área	Perímetro
A		y		
B			$2y$	$2y + 4$
Formado por los dos rectángulos.	$2y + 3$		$2y^2 + 3y$	

3. Calcula el área y el perímetro del siguiente hexágono:



Área =
Perímetro =

4. El largo de un invernadero mide el doble que el ancho y alrededor de éste se encuentra un pasillo de 2 m de ancho y 136 m^2 de área.



a) ¿Cuántos metros cuadrados de superficie tiene el invernadero?

_____

b) ¿Qué expresión algebraica le corresponde al área del invernadero?

_____

c) ¿Qué expresión algebraica le corresponde al área del pasillo?

_____

Para la próxima sesión se requiere el siguiente material.

- Una barra de plastilina
- Una navaja de un filo (cúter)

Sesión 7.

Volumen de prismas y pirámides

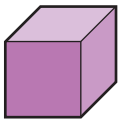
Propósito

Calcularás el volumen de prismas y pirámides, asimismo sabrás de dónde se obtienen las fórmulas para calcularlo.

Para empezar

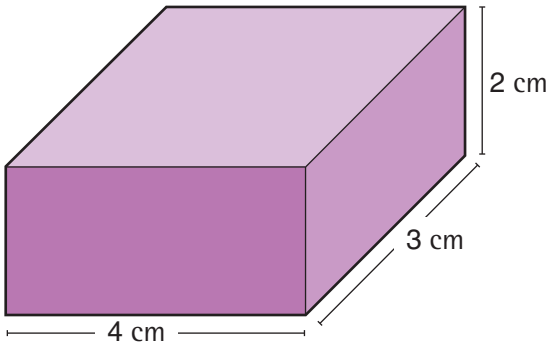
Las cajas

En la primaria aprendiste que el volumen de un cubo cuyas aristas miden un centímetro, es un *centímetro cúbico*.
El centímetro cúbico es una unidad que se usa para medir el volumen de los cuerpos geométricos, se simboliza cm^3.



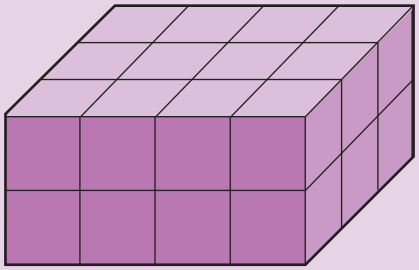
Manos a la obra

I. Considera ahora una caja en forma de prisma rectangular con las siguientes medidas:



Éstos son algunos procedimientos para calcular el volumen de la caja, complétalos.

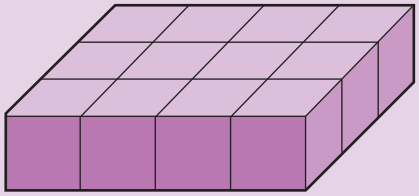
Procedimiento A. Se forma con centímetros cúbicos un prisma de esas medidas y luego se cuenta el número de cubos que se utilizaron.



Número de centímetros cúbicos: _____

Procedimiento B. Se investiga cuántos centímetros cúbicos forman la base del prisma

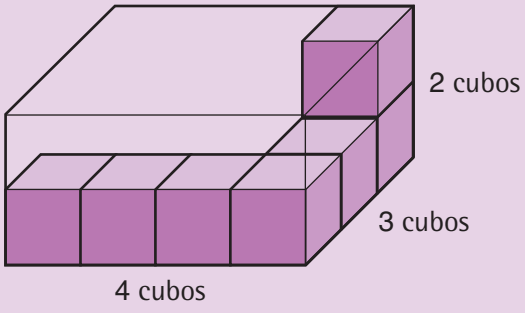
En la base caben: _____ cubos



Luego se multiplica este número por la altura del prisma:

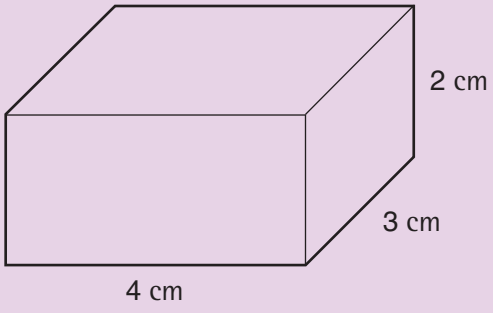
_____ × _____ = _____

Procedimiento C. Se investiga cuántos cubos se necesitan a lo largo, a lo ancho y a lo alto de la caja y se multiplican estos tres números.



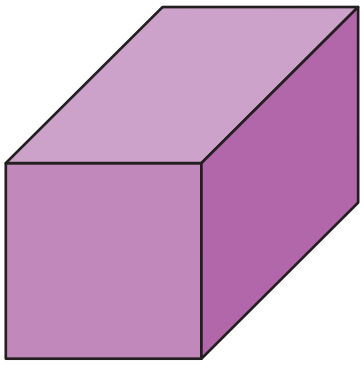
_____ × _____ × _____ = _____

Procedimiento D. Se multiplican las medidas del prisma.



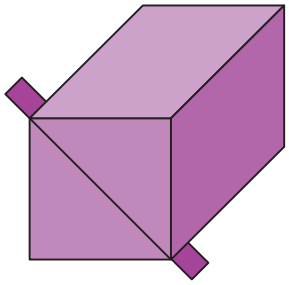
_____ × _____ × _____ = _____

II. Con la plastilina haz un prisma cuadrangular de 6 x 6 x 10 cm y calcula su volumen:



Volumen = _____ cm^2

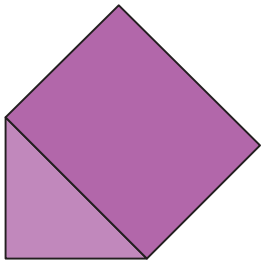
Con mucho cuidado corta el prisma por la mitad a lo largo y coloca la navaja en los vértices contrarios de la base cuadrada.



Responde:

a) ¿Qué volumen tiene cada una de las piezas que han quedado? _____

b) ¿Cómo se llaman los cuerpos geométricos que resultaron del corte?



c) Ya que conoces la fórmula para calcular el volumen de un prisma cuadrangular ¿Qué le hace falta a esa fórmula para que con ella se pueda calcular el volumen de un prisma triangular? _____

Si calculas el área del triángulo, que es lo mismo que calcular el área del cuadrado original y dividir éste entre dos, sólo necesitas multiplicar el resultado por la altura del prisma para conocer su volumen.

A lo que llegamos

Al calcular el número de centímetros cúbicos (cm^3) que forman el prisma se está calculando su volumen. Otras unidades de volumen son el decímetro cúbico (dm^3) y el metro cúbico (m^3).

Hay varias maneras de calcular el volumen de un prisma rectangular, por ejemplo:

Volumen del prisma rectangular = Largo × ancho × altura

Si el largo se simboliza con *l*, el ancho con *a* y la altura con *h*, tenemos:

$$V = l \times a \times h$$

Observa que al multiplicar largo por ancho estás calculando el área de la base, así que otra manera de escribir la fórmula es:

Volumen = Área de la base por la altura

Si simbolizamos con *B* al área de la base, la fórmula puede escribirse:

$$V = B \times h$$

La base puede ser cualquier polígono, así que para calcular su área se utiliza la fórmula que cada uno de éstos tiene para este fin, por ejemplo:

Para una base triangular:

$$B = \frac{bh}{2}$$

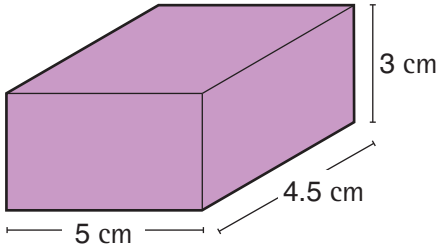
Para una base de otro polígono:

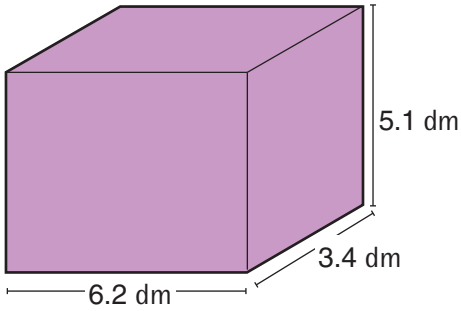
$$B = \frac{Pa}{2}$$

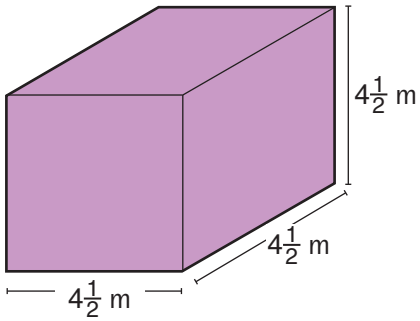
Al calcular el volumen, se está calculando número de centímetros cúbicos (cm^3) que forman el prisma. Otras unidades de volumen son el decímetro cúbico (dm^3) y el metro cúbico (m^3).

Ejercicios:

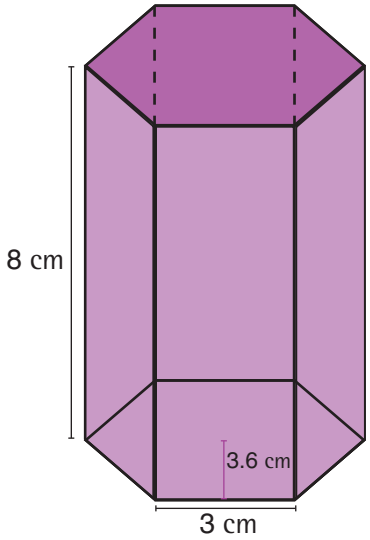
1. Calcula el volumen de los siguientes prismas.

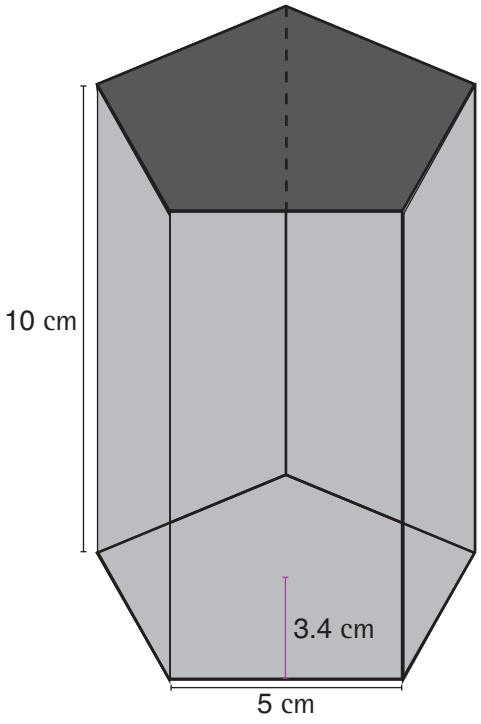


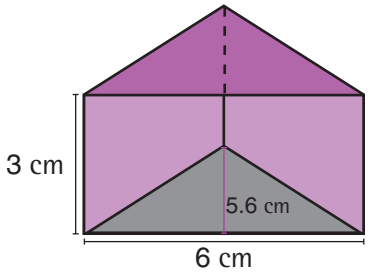




2. Calcula el volumen de los siguientes prismas.







Sesión 8.

Medidas de tendencia central

Propósito

Aprenderás a calcular algunas de las medidas de tendencia central cuando un conjunto de datos está agrupado en intervalos.

Para empezar

Cuando se estudia un fenómeno se obtiene una cantidad de datos que puede organizarse y presentarse en una *tabla de frecuencias* o en una *gráfica* (*de barras*, *circular* o en un *polígono de frecuencias*); esto depende del tipo de datos que se ha obtenido y de los resultados que se desean.

Otra manera de presentar los datos es a partir de sus *medidas de tendencia central*, las cuales proporcionan valores de la *media*, la *mediana* y la *moda*, que permiten resumir y comparar la tendencia de un conjunto de datos para establecer conclusiones.

Consideremos lo siguiente

Un grupo de 20 alumnos presentó un examen de matemáticas de 100 preguntas. Del total de alumnos, 10 % contestó correctamente entre 1 y 25 preguntas de la prueba; 30 %, entre 26 y 50 preguntas; 50 %, entre 51 y 75, y el resto entre 76 y 100.

Se considera que el grupo tuvo un buen desempeño en el examen si su promedio es mayor o igual a 63 aciertos.

¿Fue bueno el desempeño del grupo? ¿Por qué?

En equipos comenten:

¿Cuál de los siguientes valores es más conveniente utilizar para determinar si el desempeño que tuvo el grupo fue bueno de acuerdo con lo señalado al principio?

- El intervalo de aciertos en el que hay un mayor porcentaje de alumnos.
- La media aritmética de las cantidades obtenidas por los 20 alumnos.

Manos a la obra

I. Completen en equipos de cuatro alumnos la siguiente tabla.

Cantidad de gasolina (en litros)	Distancia recorrida (en kilómetros)
2	32
4	64
16	256

Modelo A

Cantidad de gasolina (en litros)	Distancia recorrida (en kilómetros)
3	51
7	119
11	187

Modelo B

Cantidad de gasolina (en litros)	Distancia recorrida (en kilómetros)
3	48
15	240
21	378

Modelo C

a) ¿Cuál es el intervalo de aciertos en el que hay más alumnos?

_____

b) ¿Cuántos alumnos tuvieron entre 1 y 50 aciertos en el examen?

_____

c) Con la información que tienen, ¿pueden decir cuántos alumnos respondieron correctamente a 63 preguntas?

_____

d) ¿Y cuántos respondieron correctamente a más de 63 preguntas? ¿Por qué?

_____

II. Completen la siguiente tabla y, luego contesten las preguntas de los incisos.

	Tiempo del recorrido (en horas)	Distancia recorrida (en kilómetros)	Velocidad (en kilómetros por hora)
Automóvil A	3	249	
Automóvil B	11	924	
Automóvil C	1	84	
Automóvil D	7	595	

En el intervalo 1-25 su punto medio es 13 y su frecuencia 2, lo que podemos interpretar de las dos siguientes maneras:
En el examen de matemáticas hubo dos alumnos que obtuvieron entre 1 y 25 aciertos.
En el examen de matemáticas hubo dos alumnos que obtuvieron 13 aciertos.

a) ¿Cuál es el intervalo que tiene el mayor número de alumnos (mayor frecuencia)?

_____

¿Cuántos alumnos obtuvieron ese intervalo de aciertos?

_____

¿Cuál es el punto medio de intervalo en el que se tiene el mayor número de alumnos (frecuencia)?

_____

b) Escriban, en su cuaderno, cómo interpretarían estos datos.

_____

c) ¿Cuántos alumnos son en total (frecuencia total)?

_____

d) ¿Cuál es la suma de los aciertos de todos los alumnos?

_____

e) ¿Cuál es la media aritmética del número de aciertos que obtuvo el grupo?

_____

¿Consideran que el grupo tuvo un buen desempeño en el examen de matemáticas?

_____

¿Por qué? _____

Lee el texto siguiente:

Cuando un conjunto de datos está organizado en intervalos iguales, cada intervalo tiene *un límite inferior y uno superior.*

El tamaño de un intervalo es igual a la diferencia entre dos sucesivos límites inferiores o superiores.

Cada intervalo puede ser identificado y representado por su límite inferior y superior, pero también podemos utilizar su punto medio, el cual se obtiene con sólo sumar los límites inferior y superior y dividir esta suma entre 2. Por ejemplo, el punto medio del primer intervalo es:

$$\frac{(1+25)}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

Ese valor permite efectuar operaciones aritméticas con intervalos.

A lo que llegamos

Cuando un conjunto de datos está organizado en intervalos de igual tamaño, al que tiene mayor frecuencia se le llama *intervalo modal* y su punto medio se puede considerar que es el *valor de la moda.*

Una vez que se tiene el punto medio de cada intervalo se puede obtener la *media aritmética* de todo el conjunto de datos agrupados. Para ello, primero se multiplica el punto medio de cada intervalo por su frecuencia, luego se suman los productos y el total se divide entre el número de datos. Por ejemplo:

	Cantidad recibida (en libras)	Cantidad cambiada (en dólares)	Tipo de cambio
Casa de cambio A	145	290	
Casa de cambio B	240	600	
Casa de cambio C	180	414	
Casa de cambio D	195	468	
Casa de cambio E	120	276	

Responde lo siguiente:

¿Cuál de los dos valores, *media aritmética* o *moda*, consideras que es correcto utilizar para presentar los resultados de este grupo?

Marca con una **X** la afirmación que consideres que justifica su respuesta anterior.

( ) El primer resultado, porque el valor de la media aritmética de datos agrupados toma en cuenta el número de aciertos que obtuvieron los 20 alumnos.

( ) El segundo resultado, porque para obtener el valor de la moda de datos agrupados se toma en cuenta entre qué número de aciertos se concentra el mayor número de alumnos.

( ) Los dos resultados, porque tanto la media aritmética como la moda o el intervalo modal son medidas de tendencia central y, en este caso, se pueden calcular para determinar el desempeño del grupo.

Sesión 9.

Sucesiones de números con signo

Propósito Construirás sucesiones de números con signo y obtendrás la regla que genera tal sucesión.

Para empezar *Una sucesión es un conjunto de números que mantienen un orden constante*, es decir, la regla que determina qué número sigue de otro, es la misma para todos los números sucesivos de ese conjunto.

Consideremos lo siguiente

Completa los términos que faltan en la siguiente sucesión de números:

-5, -2, , 4, 7, 10, , 16, , , 25, 28, 31, , 37, , ...

a) Escribe una regla para obtener cada uno de los términos de la sucesión.

_____

b) ¿Cuál es el término que está en el lugar 30?

_____

c) ¿Qué lugar ocupa el número 121 en esta sucesión?

_____

En equipos comparen sus respuestas. Comenten cómo hicieron para encontrar la regla.

I. Señala cuáles de las siguientes sucesiones se pueden obtener utilizando la regla *sumar tres al término anterior.*

- -15, -11, -7, -3, 1, 5, ...
- 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...
- -4, -1, 2, 5, 8, 11, ...
- -8, -3, 2, 7, 12, 17, ...
- -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, ...
- -14, -6, 2, 10, 18, 26, ...
- -12, -9, -6, -3, 0, 3, ...

II. Responde las preguntas:

a) ¿Con la regla *sumar cinco al término anterior*, podemos obtener muchas sucesiones o una sola sucesión? _____

_____

b) Encuentra una sucesión que se obtenga con esta regla.

_____

c) Una regla más precisa para obtener la sucesión que escribiste es *sumar cinco al término anterior y el primer término es*

_____

d) ¿Por qué crees que esta regla sea más precisa?

_____

Compara tus respuestas con tus compañeros y comenten: la *diferencia entre dos términos consecutivos* de una sucesión se obtiene al restar a un término el anterior a éste. ¿Cuál es la diferencia entre dos términos consecutivos de las sucesiones que encontraron en el inciso b)?

Obtengan tres sucesiones en las que la diferencia entre dos términos consecutivos sea 7.

III. Completa lo que falta en las siguientes expresiones y responde las preguntas:

a) Una regla para obtener la sucesión 5, 11, 17, 23, 29, 35, ... *es sumar seis al término anterior y el primer término es* _____

b) ¿Cuál es la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión?

_____

c) Una regla para obtener la sucesión -12, -10, -8, -6, -4, -2, es *sumar* _____*al término anterior y el primer término es* _____.

d) ¿Cuál es la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión?

_____

e) Escribe la sucesión que se obtiene con la regla *sumar* cinco *al término anterior y el primer término es* -14:

_____

f) ¿Cuál es la diferencia entre dos términos consecutivos de esa sucesión?

_____

A lo que llegamos

En las sucesiones en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante, cada término se obtiene sumando una misma cantidad al término anterior.

La regla verbal para obtener este tipo de sucesiones se puede expresar diciendo *cuánto se debe sumar a cada término para obtener el siguiente y cuál es el primer término.* Por ejemplo:

En la sucesión -8, -3, 2, 7, 12, 17, ...

La diferencia entre dos términos consecutivos se calcula al restar a un término el término anterior, por ejemplo: 7 – 2 = 5.

La regla verbal es: *sumar 5 al término anterior y el primer término es -8.*

Si no se indica cuál es el primer término, se pueden obtener muchas sucesiones utilizando la misma regla.

Consideremos lo siguiente

La regla verbal para una sucesión de números con signo es decir, cuánto se debe sumar a cada término para obtener el siguiente y cuál es el primer término. Ahora aprenderás a obtener la regla algebraica utilizando el lugar que ocupa cada término.

Manos a la obra

Trabajen en equipos de tres personas y sigan las instrucciones.

Para la siguiente sucesión de números:

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, ...

a) ¿Cuál es la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión?

_____

b) Señalen con cuáles de las siguientes reglas podemos obtener los términos de la sucesión. La n indica el lugar que el término ocupa en la sucesión (por ejemplo 18 ocupa el lugar 5 de la sucesión):

- $2n + 4$.
- *Sumar cuatro al término anterior y el primer término es* 2.
- $4n + 2$.
- $4n - 2$.

c) Comenten si algunas de las reglas anteriores son equivalentes.

Completa la siguiente tabla para encontrar los términos que se indican en cada sucesión:

Lugar del término	Reglas algebraicas				
	$3n$	$3n + 1$	$3n - 7$	$3n - 10$	$3n - 16$
1					
2					
3					
4					
10					
100					
115					

a) ¿Cuál es la diferencia entre dos términos consecutivos en cada una de estas sucesiones? _____

b) Para la sucesión -5, -2, 1, 4, 7, ... ¿Cuál es la regla algebraica que nos permite encontrar el término que está en el lugar n?

_____

c) ¿Aparece en esta sucesión el número 278? _____

Comparen sus respuestas y comenten cómo hicieron para encontrar la regla.

I. Responde las preguntas sobre la sucesión que se obtiene con la regla $3n - 7$.

a) Una regla equivalente para obtener esta sucesión, es sumar _____ al término anterior y el primer término es _____

b) ¿Cuál es el término que está en el lugar 40? _____

c) ¿Cuál de las dos reglas utilizaste para encontrar ese término? _____

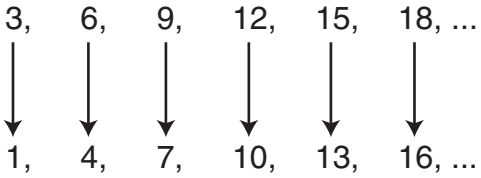
d) ¿Cuál es el término que está en el lugar 48? _____

II. Responde las preguntas sobre la sucesión 1, 4, 7, 10, 13, 16, ...

a) ¿Cuál es la diferencia entre dos términos consecutivos de esta sucesión?

_____

b) Observa las dos sucesiones:



¿Cuál es la regla algebraica para obtener la primera sucesión (3, 6, 9, 12, 15, 18, ...)?

_____

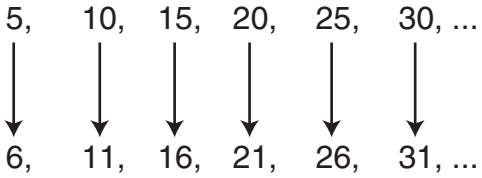
c) Subraya la operación que debemos hacer para pasar de cada término en la primera sucesión a su correspondiente término en la segunda sucesión:

- Restar 2
- Sumar 2

d) ¿Cuál es la regla algebraica para obtener la sucesión 1, 4, 7, 10, 13, 16, ...?

_____

III. Observa el diagrama y responde las preguntas.



A lo que llegamos

En las sucesiones, en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante, podemos dar la regla algebraica el lugar del término se le debe sumar el número que es la constante.

Por ejemplo:

En la sucesión –8, –3, 2, 7, 12, 17, ..., la diferencia es de 5.

Para encontrar la regla, sabemos que para pasar de cada término en la sucesión que se obtiene con la regla $n+5$, a su correspondiente término en la sucesión –8, –3, 2, 7, 12, 17, ...,Entonces la regla para obtener la sucesión –8, –3, 2, 7, 12, 17, ... es $n+5$.

Ejercicios:

1. Encuentra los primeros 10 términos de las sucesiones que se obtienen con las siguientes reglas:

a) Sumar 8 al término anterior y el primer término es –19

_____

b) $7n - 25$

_____

c) $2n - 4.5$

_____

2. Responde las preguntas para la sucesión -23, -16, -9, -2, 5, 12,19, ...

a) ¿Cuál es la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión?

_____

b) ¿Cuál es la regla algebraica para obtener la sucesión?

_____

c) La regla verbal para obtener esta sucesión es sumar al término anterior y el primer término es _____

d) ¿Cuál es el término que ocupa el lugar 78? _____

e) ¿En qué lugar de término está el número 201? _____

3. Responde a las preguntas sobre la siguiente sucesión:
-2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, ...

a) ¿Cuál es la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión?

_____

b) Expresa la regla algebraica para obtener la sucesión _____

c) ¿Cuál es el término que ocupa el lugar 25 en la sucesión? _____

d) ¿Cuál es el término que ocupa el lugar 278? _____

e) ¿Qué lugar ocupa el número 101.5 en esta sucesión? _____

Sesión 10.

Ecuaciones de primer grado

Propósito

Resolverás problemas que impliquen el planteamiento y resolución de ecuaciones con una incógnita.

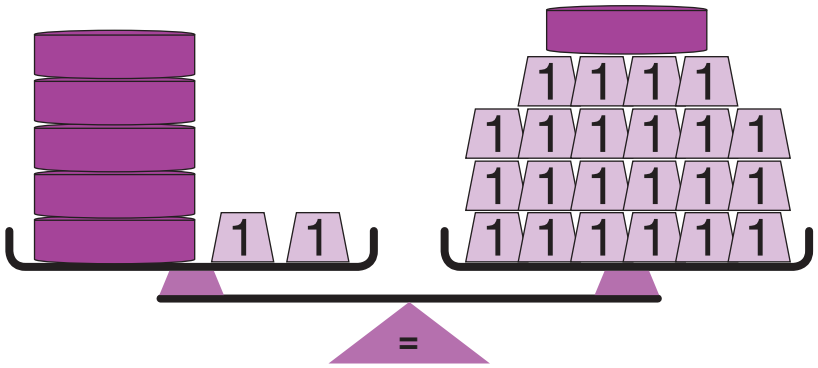
Para empezar

Una ecuación es una igualdad donde hay un valor desconocido llamado incógnita. Resolver la ecuación significa encontrar el valor de la incógnita.

Consideremos lo siguiente

El modelo de la balanza nos permite representar y resolver ecuaciones. Para ello, es necesario que las acciones que se realicen en ambos lados de la balanza mantengan siempre el equilibrio.

La siguiente balanza está en equilibrio. En ella se colocaron anillos y pesas de un gramo 1 . El peso de los anillos se desconoce, pero todos los anillos pesan lo mismo.



¿Cuánto pesa cada anillo? _____

Compara tus respuestas con tu grupo y comenten cómo encontraron el valor de cada anillo.

Manos a la obra

En parejas resuelvan el problema que sigue.

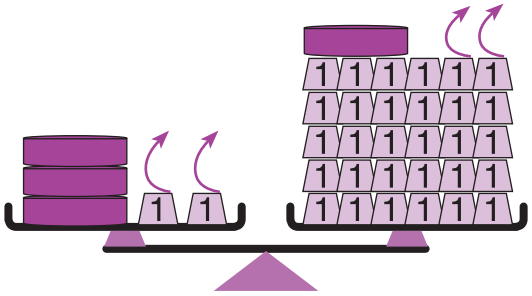
I. ¿Cuáles de las siguientes acciones mantendrían la balanza en equilibrio? Subráyenlas.

- Pasar un anillo del lado izquierdo al lado derecho.
- Quitar 1 anillo de ambos lados.
- Cambiar un anillo por una pesa de 1 gramo en el lado derecho.
- Quitar el mismo número de pesas de 1 gramo en ambos lados.
- Quitar 1 pesa de 1 gramo en ambos lados.

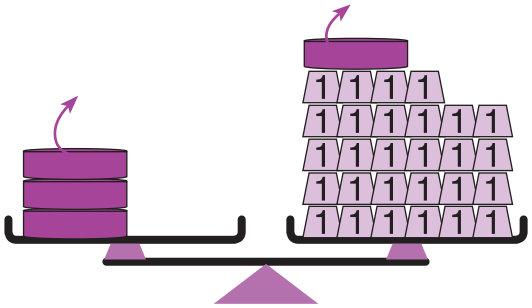
Comparen sus respuestas y comenten por qué creen que mantienen el equilibrio de la balanza.

II. A continuación se presenta una nueva situación con la balanza, completa lo que se te pide para hallar el peso de estos otros anillos.

a) ¿Cuántas pesas de 1 gramo se pueden quitar de cada lado sin que la balanza pierda el equilibrio? _____

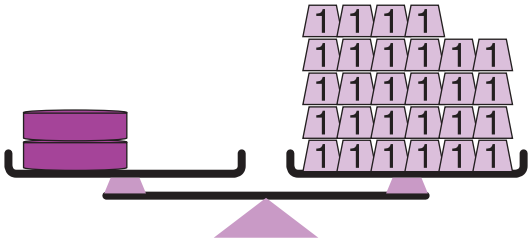


b) Ahora, ¿cuántos anillos del mismo peso pueden quitarse de cada lado sin que se altere el equilibrio de la balanza? _____

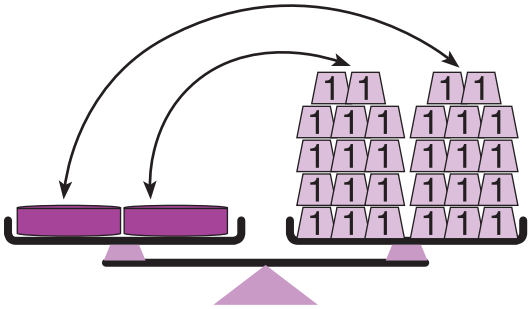


Después de quitar las pesas de 1 gramo y los anillos del mismo peso,

c) ¿cuántos anillos quedan del lado izquierdo de la balanza? _____



d) ¿Cuántas pesas de 1 gramo quedan del lado derecho? _____



e) Si dos anillos pesan 28 gramos, ¿cuántos gramos pesa cada anillo? _____

A lo que llegamos

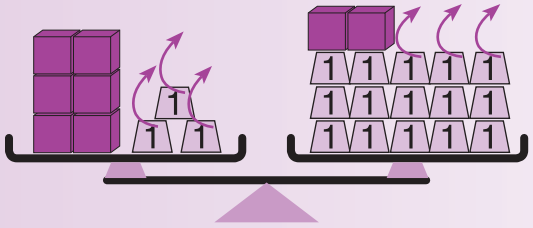
Para encontrar un peso desconocido en el modelo de la balanza, se realizan las mismas acciones en ambos platillos de ésta, ya sea quitar o poner anillos o pesas, de manera que siempre se mantenga el equilibrio.

En la siguiente balanza se tiene representada la ecuación:

$$6x + 3 = 2x + 15$$

Donde x representa el peso de un cubo.

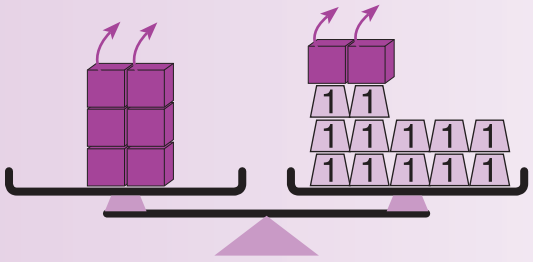
Para encontrar x se pueden quitar de ambos lados 3 pesas de 1 gramo.



Lo que puede representarse en lenguaje algebraico como sigue:

$$6x + 3 - 3 = 2x + 15 - 3$$
$$6x = 2x + 12$$

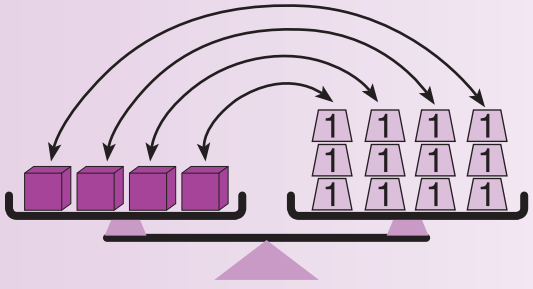
Después, se pueden quitar de ambos lados 2 cubos.



Esto se representa en lenguaje algebraico como sigue:

$$6x - 2x = 2x + 12 - 2x$$
$$4x = 12$$

Al final, el peso puede encontrarse dividiendo las 12 pesas de 1 gramo entre 4.



En lenguaje algebraico es:

$$x\frac{12}{4}=3$$

Cada cubo pesa 3 gramos.
Resolvamos otro ejemplo, la ecuación:

$$4x + 75 = 13x + 3.$$

Primero se puede restar 3 de ambos lados:

$$4x + 75 - 3 = 13x + 3 - 3$$
$$4x + 72 = 13x$$

Después, se puede restar $4x$ de ambos lados:

$$4x + 72 - 4x = 13x - 4x$$
$$72 = 9x$$

Finalmente el valor de la incógnita se encuentra dividiendo 72 entre 9.

$$x\frac{72}{9}=8$$

Ejercicios:

Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando el método de la balanza:

a) $4x + 3 = 2x + 5$

b) $3x + 1 = x + 5$

c) $x + 10 = 5x + 2$

Sesión 11.

Sistemas de ecuaciones

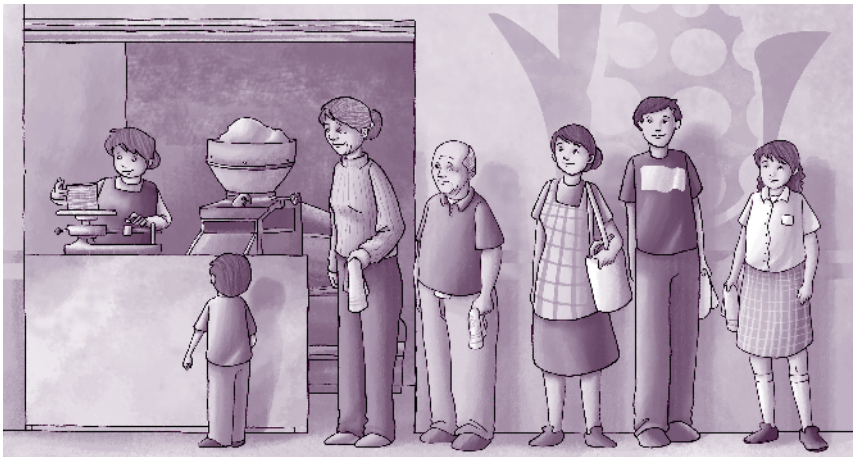
Propósito

Reconocerás la presencia de cantidades que varían una en función de la otra mediante situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología y la economía. Representarás esta relación mediante una tabla o una expresión algebraica de la forma: $y = ax + b$.

Para empezar

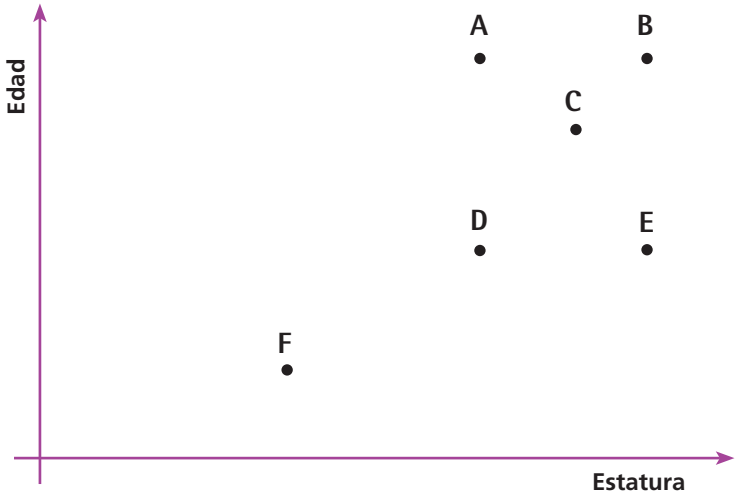
Podemos encontrar un sinfín de fenómenos en donde una cantidad depende de otra: el costo de unos tomates y la cantidad; lo que tarda una piedra en caer y su altura. A estas relaciones, se les conoce como *relaciones funcionales*, para entenderlas, el ser humano ha inventado las *expresiones algebraicas* y las *gráficas*.

Un lunes por la tarde, en la tortillería El Rosario se hizo una larga cola para comprar las tortillas. Había personas de diferentes estaturas y edades como se puede ver en la imagen de abajo.



Jorge Lola Jesús Alma Luis Valentina

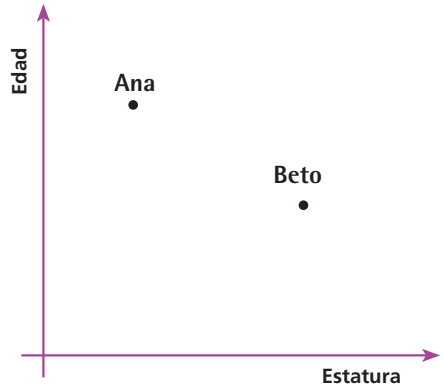
En el siguiente plano cartesiano se representan con un punto la estatura y edad por persona. Anota a cada punto el nombre de la persona, según corresponda.



Manos a la obra

Realiza la siguiente actividad.

1. Ana y Beto llegaron a formarse en la cola después. En el siguiente plano cartesiano se han dibujado los puntos que les corresponden.



¿Quién tiene mayor estatura, Ana o Beto? ___ ¿Quién tiene mayor edad? ____

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) y cuáles falsas (F)?

____ Entre más alta sea una persona, más arriba está el punto representado.

____ Entre más edad tengan, más arriba está el punto que la representa.

____ Si dos puntos están en la misma línea horizontal, las personas representadas por estos puntos tienen la misma edad.

____ Si dos puntos están en la misma línea vertical, las personas representadas por estos puntos tienen la misma edad.

De las personas que estaban formadas, antes de que llegaran Ana y Beto:

¿Quienes son las más altas? _____

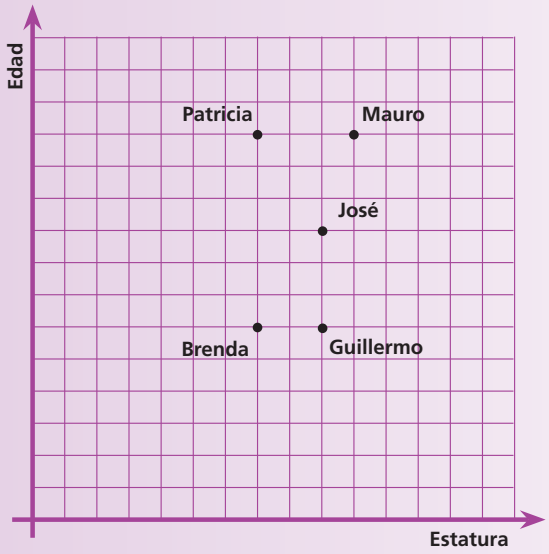
¿En cuáles puntos deben de estar sus nombres? _____

A lo que llegamos

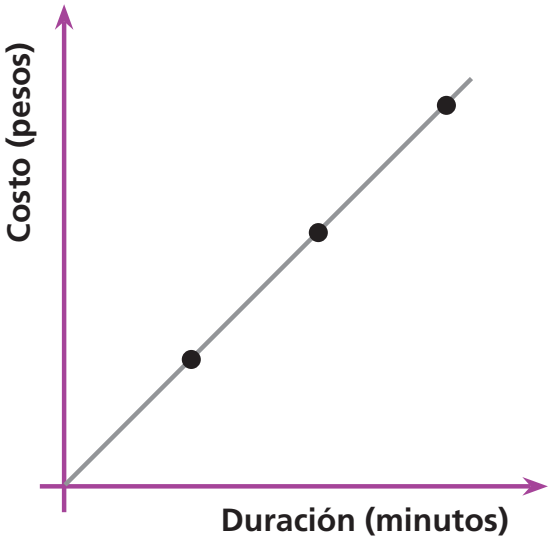
Las *coordenadas* de puntos en el plano cartesiano permiten comparar los datos que se presentan en él.

Las siguientes reglas permiten comparar las coordenadas de puntos en el plano:

- Entre más a la derecha esté un punto, más grande será el valor de su *abscisa* (que es el eje horizontal o eje *x*).
- Entre más arriba esté un punto, más grande será el valor de su *ordenada* (que es el eje vertical o eje *y*).



2. Un taxi cobra por su servicio $10.00 más $2.00 por cada kilómetro recorrido.



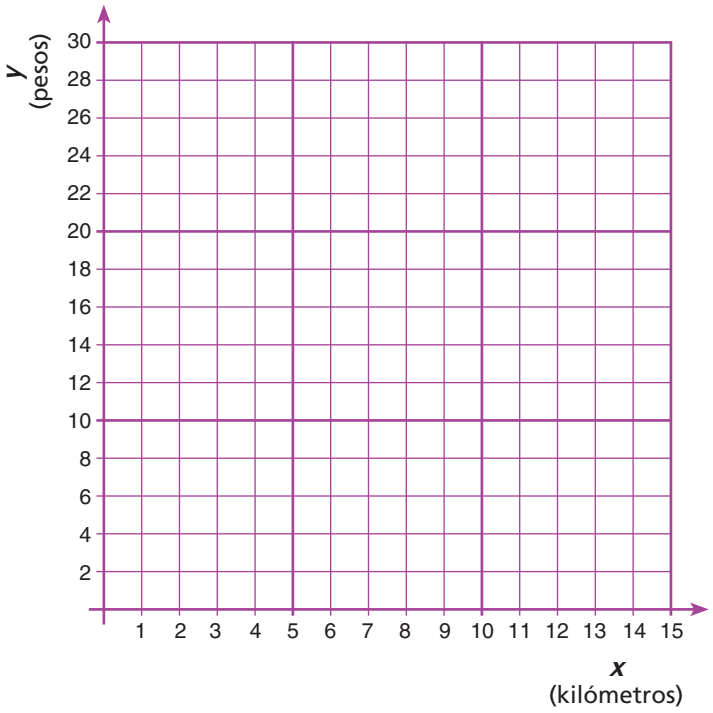
Contesta lo siguiente:
Si el taxi recorre 2 km, ¿cuánto cobrará? _____, y si recorre 10 km, ¿cuánto cobrará?
_____

Escribe una expresión que sirva para formular la cantidad que cobra el taxista (y) a partir del número de kilómetros recorridos (x).
y = _____

Usa la expresión que acaban de formular para completar la siguiente tabla.

x **Número de kilómetros**	***y*** **Cantidad a cobrar en pesos**
2	
4	
6	
8	
10	

Localiza los valores de la tabla en el siguiente plano cartesiano



A lo que llegamos

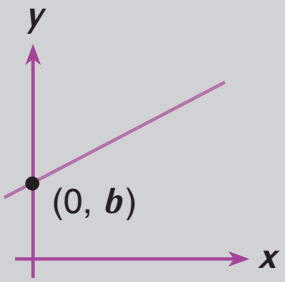
A menudo encontramos cantidades relacionadas en las que su gráfica asociada son puntos sobre una línea recta. A este tipo de relaciones se les conoce como *relaciones lineales*. Las *relaciones de proporcionalidad* también son relaciones lineales, pues su gráfica es una línea recta.

Un pasajero sube al taxi y sólo tiene $32.00, ¿cuántos kilómetros puede viajar? _____

Recuerden que:

Al valor donde la gráfica de una relación lineal interseca al eje *y* se le conoce como *ordenada al origen*.

En la siguiente figura, la letra *b* representa la ordenada al origen.

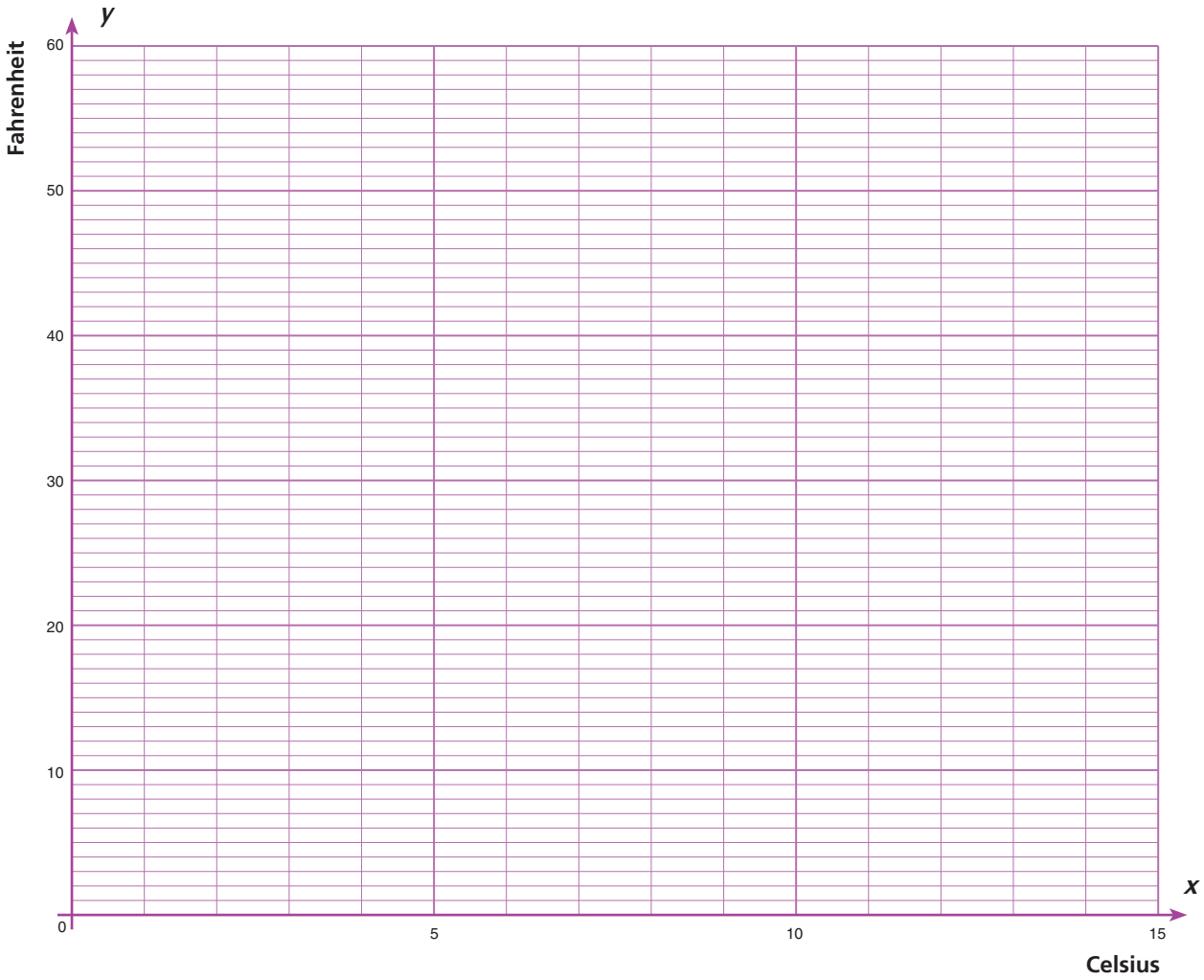


Con frecuencia es útil calcular la expresión que relaciona dos cantidades x y y. Si esta relación es lineal, es posible encontrar la expresión al calcular la ordenada al origen y el incremento de y cuando x cambia de cero a uno. Una vez encontrados estos números, la expresión se puede escribir así:

y = (incremento al aumentar uno) x + (ordenada al origen)

Comúnmente esto se escribe como $y = mx + b$.

3. Para medir la temperatura se usan dos unidades distintas: los grados *Celsius* (°C) y los *Fahrenheit* (°F). La relación que permite pasar de una unidad a la otra es lineal. La siguiente figura muestra la gráfica de dicha relación.



Cuando la temperatura es de 0 °C, ¿cuál es la temperatura en grados Fahrenheit? Es decir, ¿cuál es la ordenada al origen? _____

Cuando la temperatura es de 5 °C, ¿cuál es la temperatura en °F? _____

Decide cuál de las siguientes cantidades fue el aumento de temperatura, si la temperatura cambió de 0 °C a 1 °C. _____

a) 1.7 °F *b)* 2 °F *c)* 1.8 °F *d)* 1.9 °F

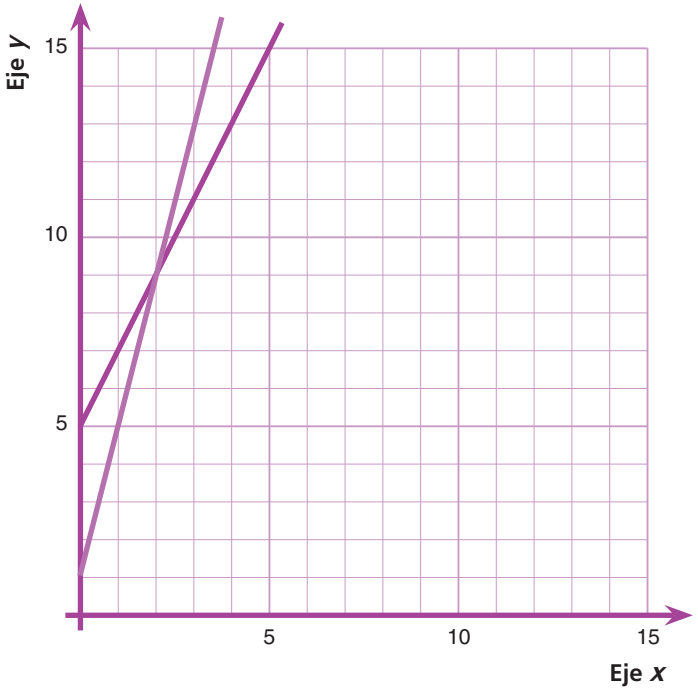
Escribe una expresión que relacione y (la temperatura medida en grados Fahrenheit) con x (la temperatura medida en grados Celsius). y = _____

La longitud de los metales se modifica cuando son sometidos a cambios de temperatura. La siguiente tabla muestra cómo varía la longitud de una barra de hierro al someterla a distintas temperaturas.

Temperatura (°C)	0	10	20	30	40
Longitud de la barra de hierro (m)	10	10.012	10.024	10.036	10.048

Si x es la temperatura y y la longitud de la barra de hierro, ¿cuál es la expresión que permite encontrar y a partir de x? $y =$ _____

Para comparar dos o más relaciones lineales es útil construir sus gráficas en el mismo plano cartesiano. Por ejemplo, las gráficas de las relaciones lineales $y = 4x + 1$ y $y = 2x + 5$ se han dibujado en el siguiente plano cartesiano.



De esta gráfica se puede ver que: el valor de la expresión $y = 4x + 1$ es menor que el de la expresión $y = 2x + 5$ cuando x toma valores menores a 2 (pues la gráfica en color está por debajo), y los papeles se invierten cuando x toma valores mayores que 2.

En una escuela telesecundaria quieren rentar un autobús para realizar una excursión. Se solicitó a 3 compañías de autobuses un presupuesto, las cuales proporcionaron la siguiente información:

- Compañía A: cobra $1 500.00 más $20.00 por cada kilómetro recorrido.
- Compañía B: cobra $2 000.00 más $15.00 por cada kilómetro recorrido.
- Compañía C: cobra $3 000.00 más $10.00 por cada kilómetro recorrido.

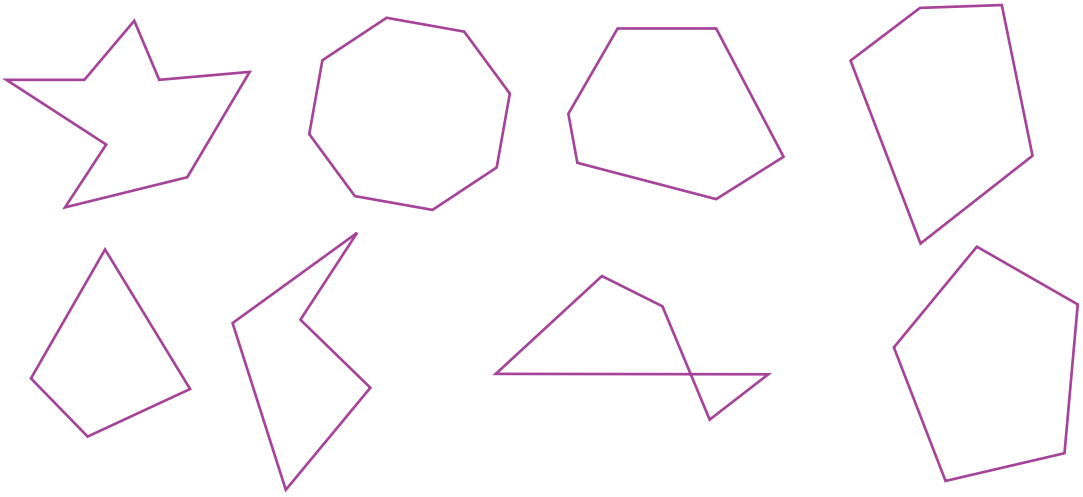
Calcula las expresiones que relacionan el cobro con el número de kilómetros recorridos para cada compañía.
¿En cuál es más barato contratar a la compañía B? Entre ____km y _____km.

Sesión 12.

Los polígonos y sus ángulos internos

Propósito Establecerás una fórmula que permita calcular la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono.

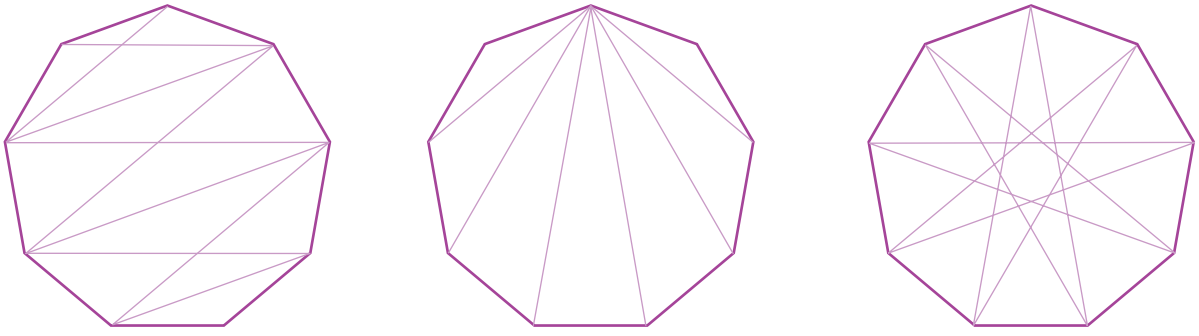
Para empezar Un polígono es una figura geométrica cerrada y plana formada por lados rectos. Como los siguientes:



La palabra polígono proviene de las palabras griegas *poli* que significa muchos y *gonos* que significa ángulos. Un polígono es *convexo* si cada uno de sus ángulos internos mide menos de 180° y sus lados no se cruzan.

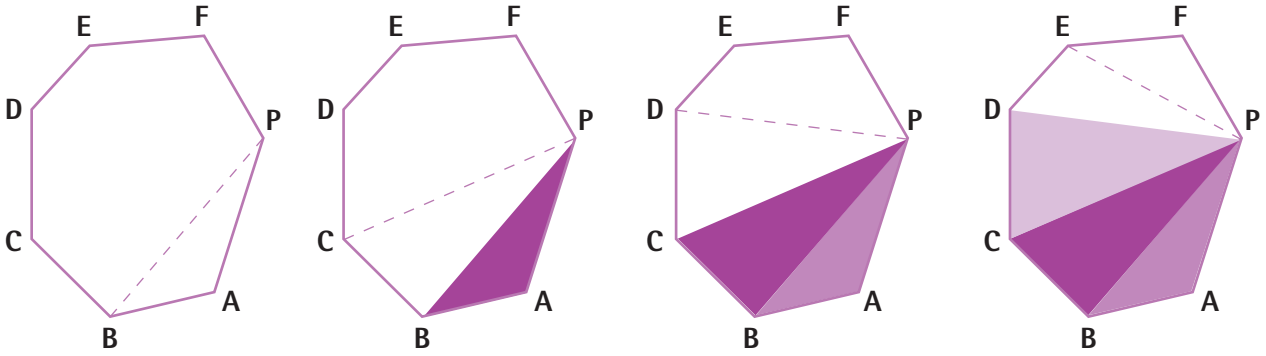
Manos a la obra

1. En los siguientes eneágonos se trazaron diagonales para dividirlos en triángulos.



¿En cuál de los eneágonos se utilizó el procedimiento descrito en el apartado consideremos lo siguiente para dividirlo en triángulos?

2. Las figuras muestran la división de un heptágono en triángulos trazando sus diagonales desde un vértice.



Completa las siguientes frases.
En la figura 1 la diagonal PB dividió al heptágono en un triángulo y en un hexágono.

En la figura 2 la diagonal PC dividió al hexágono en un _____ y en un pentágono.

En la figura 3 la diagonal PD dividió al pentágono en un triángulo y un _____

En la figura 4 la diagonal PE dividió al _____ en dos triángulos.
¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde el punto P?

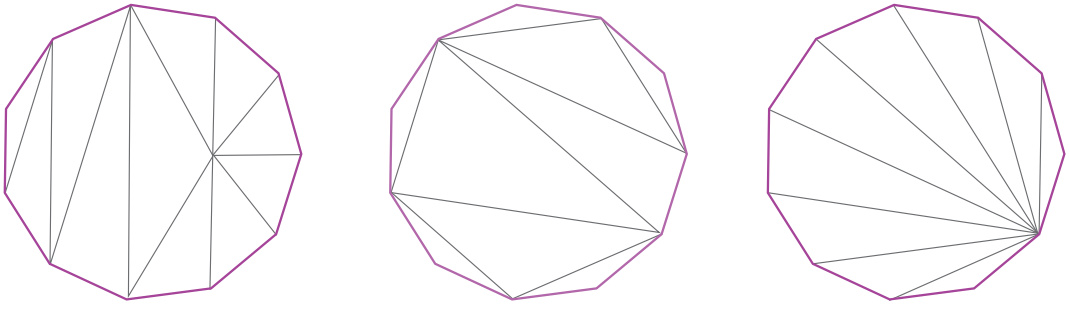
Observen que por cada diagonal que se traza se forma un triángulo y la última diagonal forma dos triángulos ¿En cuántos triángulos quedó dividido el heptágono? _____
Si se trazan desde un vértice las diagonales de un polígono de 10 lados, ¿cuántas diagonales se obtienen? _____ ¿En cuántos triángulos quedará dividido? _____

A lo que llegamos

El *número de triángulos* en los que se puede dividir un polígono convexo es igual al *número de lados del polígono menos dos*. Por ejemplo, un polígono convexo de 15 lados se puede dividir en 13 triángulos.

¿Cuáles de las siguientes divisiones en triángulos del endecágono cumplen con las siguientes características?

1. Los vértices de los triángulos son vértices de un pentágono.
2. Juntando todos los ángulos de todos los triángulos se obtienen todos los ángulos de un pentágono.



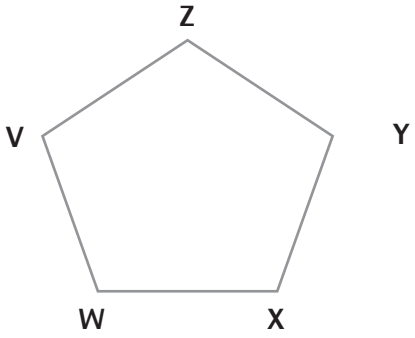
División 1 División 2 División 3

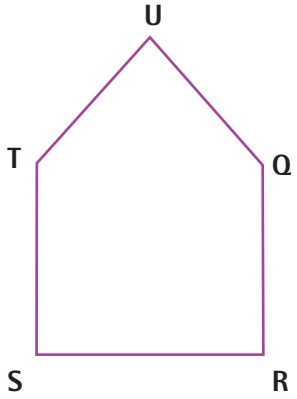
¿Cuáles son triangulaciones simples? _____ y _____

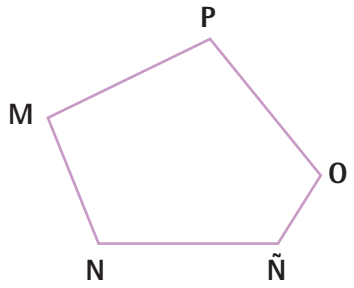
Recuerden que:

Un polígono convexo se puede dividir en triángulos cuyos vértices sean vértices del polígono y tales que la suma de las medidas de sus ángulos internos sea igual a la suma de las medidas de los ángulos internos del polígono. A esta forma de dividir un polígono en triángulos le llamaremos *triangulación simple del polígono.*

Triangula de forma simple los siguientes pentágonos.







¿En cuántos triángulos quedaron divididos cada uno de los pentágonos? _____

¿Por qué la siguiente expresión no sirve para calcular la suma de las medidas de los ángulos internos de los pentágonos?

$5\ (180^{o})$

_____

Dibujen un dodecágono convexo y triangúlenlo de forma simple.

Completa la siguiente expresión para calcular la suma de las medidas de los ángulos internos del dodecágono convexo que dibujaron.

_____ (180^{o}) = _____

La suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero convexo no puede ser igual a 420°. ¿Están de acuerdo con esta afirmación? ___ ¿Por qué?

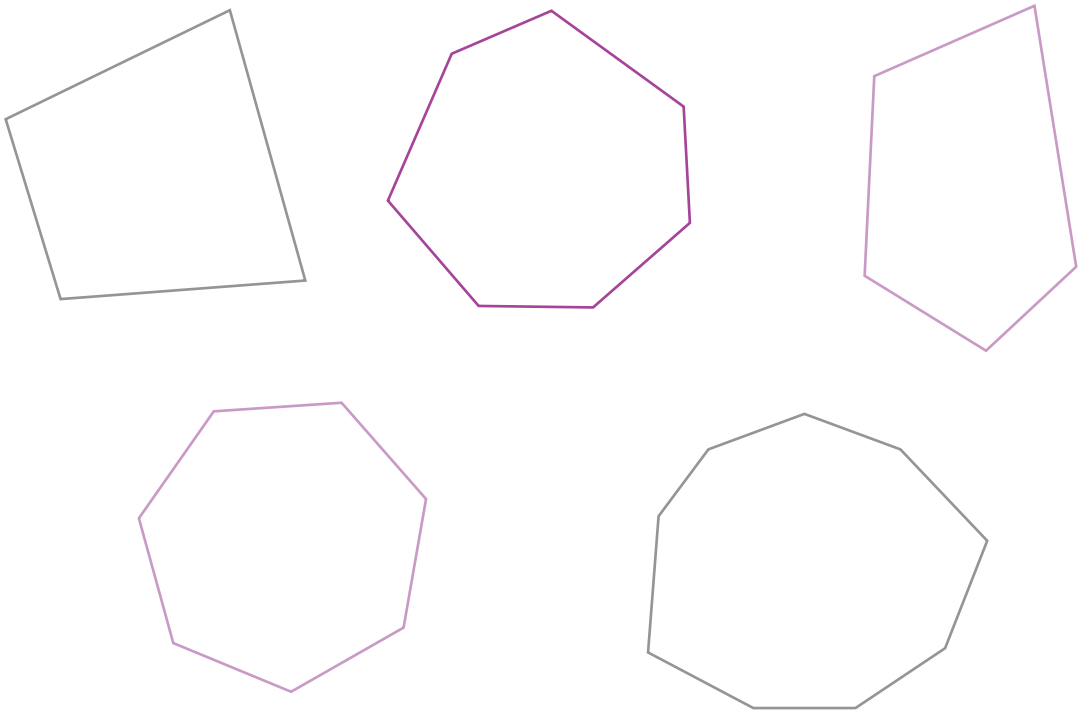
A lo que llegamos

La *suma de los ángulos internos* de un *polígono convexo* de n lados se puede calcular con la expresión: $(n - 2)\ 180^{o}$.

Si la suma de los ángulos internos de un polígono es 1 260°, ¿cuántos lados tiene el polígono? _____

¿Es posible que la suma de los ángulos internos de un polígono sea 1 130°?
_____ ¿por qué? _____

Se sabe que la suma de los ángulos internos de un polígono es igual a 900^{o}. Elije los polígonos a los cuales se hace referencia.



Determina la suma de los ángulos internos de un polígono de 235 lados. _____

La suma de los ángulos internos de un polígono es de 2 700°, ¿cuántos lados tiene el polígono? _____

Sesión 13.

Potencias y notación científica

Propósito

Elaborarás procedimientos para calcular productos y cocientes de potencias enteras positivas de la misma base. Interpretarás el significado de elevar un número a una potencia de exponente negativo. Utilizarás la notación científica para realizar cálculos de cantidades muy grandes o muy pequeñas.

Para empezar

Una *potencia* es la multiplicación de un número por sí mismo varias veces. Por ejemplo: $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ es la *quinta potencia* de *7*, se escribe 7^5 y se lee como *7 elevado a la 5*. El 7 es la *base* y el 5 es el *exponente*.

La *segunda potencia* de un número también se llama el *número elevado al cuadrado,* por ejemplo: $4^2 = 4 \times 4 = 16$, y la tercera potencia de un número también se le conoce como el *número elevado al cubo*, por ejemplo $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

Manos a la obra

Recuerden que:

En un producto de potencias de la misma base el resultado es igual a la misma base elevada a la suma de los exponentes

$$(a^n)\,(a^m) = a^{n+m}$$

Por ejemplo:

$$2^7 \times 2^{10} = 2^{7+10} = 2^{17}$$

Calcula los siguientes productos y responde las preguntas.

1. $2 \times 2 \times 2 \times 2 =$ _____

2. El resultado se puede expresar como una potencia de 2, ¿cuál es el exponente?

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{\square}$

3. $2^3 \times 2^4 =$ _____ x _____ = _____

4. Escribe cada una de las potencias como multiplicaciones y responde las preguntas.

$2^3 \times 2^2 =$ _____ x _____ x _____ x _____ x _____

(2^3) x (2^2)

¿Cuántos 2 se están multiplicando en total?_____

$2^1 \times 2^6 =$ _____ x _____

(2^1) x (2^6)

¿Cuántos 2 se están multiplicando en total?_____

Completa la siguiente tabla de multiplicación de potencias de base 2.

×	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
2^1					2^6
2^2	2^3				
2^3			2^6		
2^4					
2^5					

Expresa como potencia de la misma base el resultado de los siguientes productos de potencias:

a) $2^8 \times 2^4 =$ *b)* $5^2 \times 5^9 =$

c) $(n^3)\,(n^2) =$ *d)* $(m^a)\,(m^b) =$

Potencias de potencias

Consideremos lo siguiente

En una potencia de potencia, el resultado es igual a la base elevada al producto de los exponentes:

$$(a^n)^m = \quad a^{nm}$$

Por ejemplo:

$$(8^5)^3 = 8^{5 \times 3} = 8^{15}$$

Manos a la obra

Realiza las siguientes potencias de potencia. Todos los resultados se pueden expresar como una potencia, encuentra cuál es.

Operación	Expresa el resultado como una potencia de la misma base
$(2^2)^3 =$ _____	$= 2^{\square}$
$(2^4)^2 =$ _____	$= 2^{\square}$
$(5^2)^2 =$ _____	$= 5^{\square}$
$(3^3)^2 =$ _____	$= 3^{\square}$
$(2^3)^3 =$ _____	$= 2^{\square}$

Responde las siguientes preguntas.

Señala cuál de los tres procedimientos siguientes es correcto para encontrar el resultado de $(2^3)^3$

$(2^3)^3 = (6)^3 = 216.$

$(2^3)^3 = (2)^6 = 64.$

$(2^3)^3 = (8)^3 = 512.$

Este resultado se expresa como una potencia de 2, ¿cuál es el exponente?___

Expresa las siguientes multiplicaciones como una potencia de potencia:

$2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = (2^3)$ ☐

$6^4 \times 6^4 \times 6^4 \times 6^4 \times 6^4 \times 6^4 \times 6^4 \times 6^4 = (6^4)$ ☐

Desarrolla la siguiente potencia de potencia:

$(3^2)^5 =$ ___ x ___ x ___ x ___ x ___ x ___ x ___ x ___ x ___ x ___

3^2 3^2 3^2 3^2 3^2

¿Cuántos 3 se están multiplicando en total? _____

Desarrolla $(5^3)^2$

$(5^3)^5 =$ _____ x _____ x _____ x _____

5^3 5^3

¿Cuántos 5 se están multiplicando en total?_____

Expresa como potencia el resultado de las siguientes potencias de potencias:

$(3^2)^7 =$_____ $(5^6)^3 =$_____

$(2^a)^b =$_____ $(m^a)^b =$_____

Cocientes de potencias

Consideremos lo siguiente

En un cociente de potencias de la misma base, cuando el exponente del numerador es mayor que el exponente del denominador, el resultado es igual a la misma base elevada a la resta de los exponentes.

En general, si $n > m$.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Por ejemplo:

$$\frac{6^3}{6^5} = 6^{8-5} = 6^3$$

$$\frac{6^3}{6^5} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6} = 6 \times 6 \times 6 = 6^3$$

$$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$$

Recuerda que cada número entre el mismo número da como resultado 1, por tanto, el resultado quedó de esta manera.

$$\frac{4^3}{4^2} = 6^{8-2} = 6^6$$

$$\frac{2^9}{2^4} = 2^{9-4} = 6^5$$

Cuando el exponente del numerador es menor que el exponente del denominador, el resultado de la resta de las potencias es negativa, por eso se forma una fracción con el numerador igual a 1 y con el denominador de la misma base elevado a la diferencia de los exponentes.

En general, si $n < m$.

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

Por ejemplo: $\frac{6^5}{6^8} = 6^{5-8} = \frac{1}{6^{-3}} =$

$$\frac{6^5}{6^8} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6} = 1\,\frac{}{6 \times 6 \times 6} = 1\,\frac{}{6^3} = \nearrow \frac{1}{6^3}$$

$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$

$$\frac{7^4}{7^{12}} = \frac{1}{7^{12-4}} = \frac{1}{7^8}$$

Si los dos exponentes son iguales, el resultado es igual a uno.

En general, $\frac{a^n}{a^n} = 1$

Por ejemplo: $\frac{9^6}{9^6} = 1$

Manos a la obra

Encuentra el resultado de los siguientes cocientes de potencias de la misma base y exprésalo utilizando una potencia:

Operación	Expresa el resultado como una potencia de la misma base
$\frac{2^5}{2^2} = \frac{32}{4} =$	$= 2^{\square}$
$\frac{3^4}{3^2} =$	$= 3^{\square}$
$\frac{2^{\square}}{2^{\square}} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2} =$	$= 2^{\square}$
$\frac{2^4}{2^7} = \frac{16}{128} =$	$= \frac{1}{2^{\square}}$
$\frac{3^{\square}}{3^{\square}} = \frac{3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3} =$	$= \frac{1}{3^{\square}}$
$\frac{2^2}{2^8} =$	$= \frac{1}{2^{\square}}$

Recuerden que:

Para simplificar una fracción, se divide por el mismo número al numerador y al denominador.
Por ejemplo:

$$\frac{6}{24} \xrightarrow{\div 6} \frac{1}{4}$$

Entonces tenemos que $\frac{6}{24}$ y $\frac{1}{4}$ son equivalentes.

Expresa el resultado de los siguientes cocientes utilizando una potencia de la misma base.

a) $\frac{2^6}{2^2} = \frac{64}{4} =$ _____ $= 2^{\square}$

b) $\frac{3^4}{3^3} =$ _____ $=$

c) $\frac{2^7}{2^3} =$ _____ $=$

Exponentes negativos

Consideremos lo siguiente

Una potencia con exponente negativo es igual a una fracción cuyo numerador es uno y cuyo denominador es una potencia de la misma base con exponente igual al valor absoluto del exponente negativo.
Si $n > 0$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Una potencia con exponente cero es igual a uno.

$$a^0 = 1$$

Manos a la obra

Completa lo que falta en la tabla.

3^3	3^2	3^1			3^{-2}	3^{-3}	3^{-4}
			1	$\frac{1}{3}$			

Encuentra los exponentes que faltan.

a) $\frac{7^2}{7^6} = \frac{1}{7^{\square}} = 7^{\square}$

b) $\frac{8^{\square}}{8^{15}} = \frac{1}{8^{10}} = 8^{\square}$

c) $\frac{2^6}{2^{\square}} = \frac{1}{2^{\square}} = 2^{-18}$

d) $\frac{a^1}{a^5} = \frac{1}{a^{\square}} = a^{\square}$

En cualquier cociente de potencias de la misma base, el resultado es igual a una potencia de la misma base elevada a la diferencia de los exponentes. En general

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Por ejemplo:

$$\frac{8^{15}}{8^9} = 8^{15-9} = 8^6$$

$$\frac{6^7}{6^{12}} = 6^{7-12} = 6^{-5} = \frac{1}{6^5}$$

$$\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

Expresa el resultado del cociente utilizando una potencia de la misma base.

a) $\frac{5^{11}}{5^{16}} = 5^{\square}$

b) $\frac{7^8}{7^{19}} = 7^{\square}$

c) $\frac{a^4}{a^6} = a^{\square}$

d) $\frac{b^{15}}{b^{27}} = b^{\square}$

Realiza las siguientes potencias. Anótalas sin utilizar otra potencia.

a) 3^{-4} = _____ *b)* 2^{-8} = _____

c) 2^{-1} = _____ *d)* 9^{-2} = _____

Notación científica

Consideremos lo siguiente

La *notación científica* es una convención para expresar cantidades muy grandes o muy pequeñas.

Un número está en notación científica cuando se expresa de la forma

$$a \times 10^n$$

Donde a es un número mayor que 1 y menor que 10 y n es un número entero.

Por ejemplo, los siguientes números están en notación científica:

$$1.76 \times 10^{15}$$
$$4.034 \times 10^{-8}$$

Cuando multiplicamos un número por una potencia de 10 con exponente positivo, el punto se recorre hacia la derecha tantos lugares como el valor del exponente. Si es necesario, se completa la cantidad con ceros. Por ejemplo:

$$3.64 \times 10^{15} = 3\ 640\ 000\ 000\ 000\ 000$$

El punto se recorre hacia la derecha 15 lugares

Cuando multiplicamos un número por una potencia de 10 con exponente negativo, el punto se recorre hacia la izquierda tantos lugares como el valor absoluto del exponente:

Si es necesario, se completa la cantidad con ceros. Por ejemplo:

$2.095 \times 10^{-8} = 0.00000002095$

El punto se recorre hacia la izquierda 8 lugares

Manos a la obra

Realiza las multiplicaciones.

$5.153 \times 10^{0} =$ _____

$5.153 \times 10^{3} =$ _____

$5.153 \times 10^{15} =$ _____

$7.25 \times 10^{-1} = 7.25 \times 0.1 = 0.725$

$7.25 \times 10^{-2} = 7.25 \times 0.01 =$_____

$7.25 \times 10^{-9} =$_____

$7.25 \times 10^{-30} =$_____

Sesión 14

Triángulos congruentes

Propósito

Determinarás los criterios de congruencia de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

Para empezar

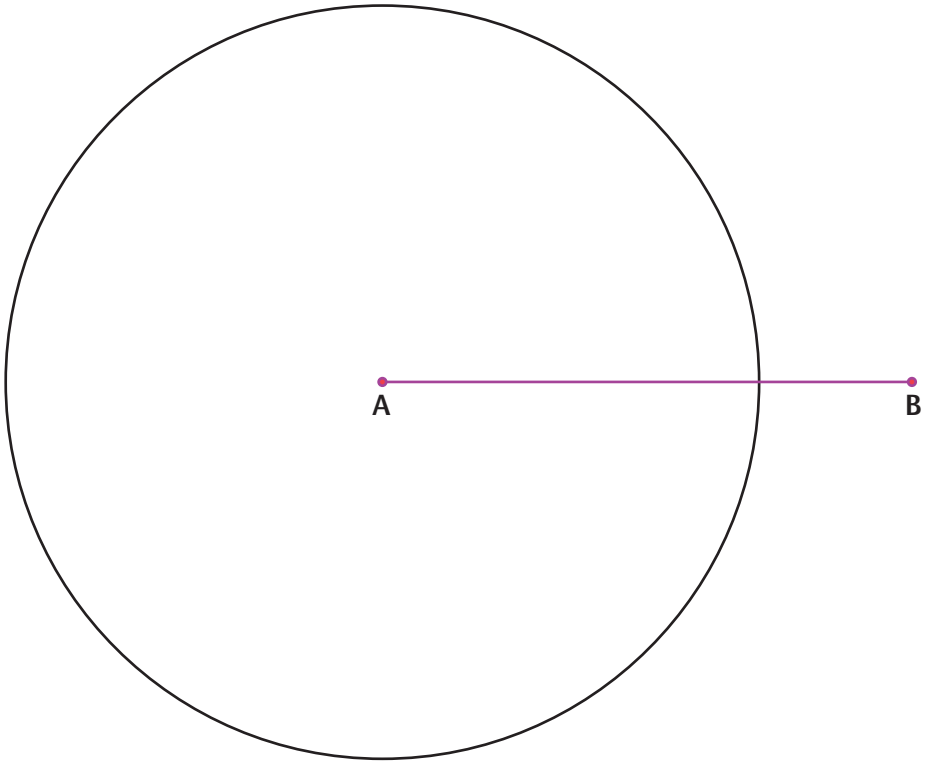
En geometría, a las figuras que son iguales se les llama *figuras congruentes*. Una forma de verificar la congruencia entre dos o más figuras geométricas es sobreponiéndolas y ver que coincidan, esto significa que dos *polígonos* son *congruentes* si se puede hacer corresponder los lados y los ángulos de uno con los lados y los ángulos del otro, de manera que:

a) Cada lado de uno de los polígonos mida lo mismo que su correspondiente en el otro polígono, y

b) Cada ángulo interno de uno de los polígonos mida lo mismo que su correspondiente en el otro polígono.

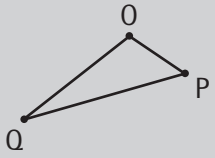
Manos a la obra

En la siguiente figura, el segmento AB mide 7 cm y el radio de la circunferencia con centro en A mide 5 cm. Elijan tres puntos de la circunferencia que no sean colineales con A y B, y denótenlos como C_1, C_2 y C_3, respectivamente.



Recuerden que:

Tres puntos son colineales si pertenecen a una misma recta.
Un triángulo se puede denotar por las letras asignadas a sus tres vértices.



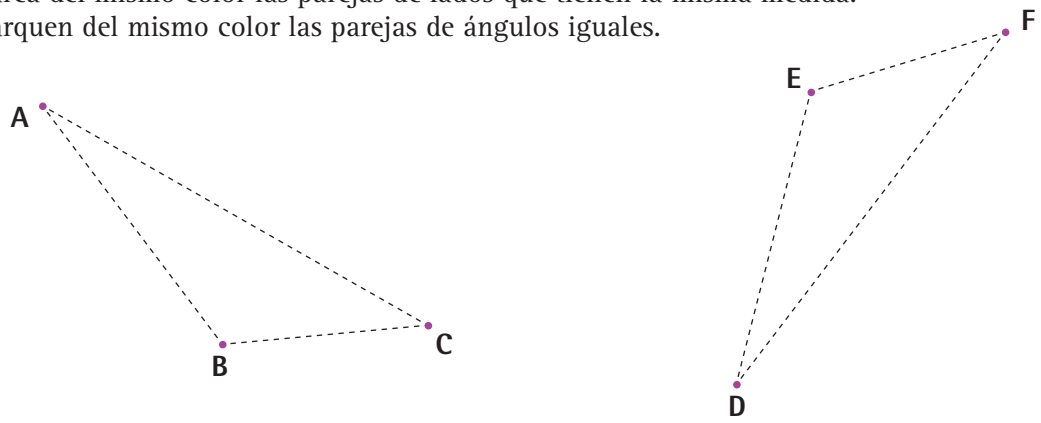
Así el triángulo se denota como el triángulo OPQ.

Traza el triángulo ABC_1, ¿cuánto mide el lado BC_1?
Traza el triángulo ABC_2, ¿cuánto mide el lado BC_2?
Traza el triángulo ABC_3, ¿cuánto mide el lado BC_3?
¿Cómo son los triángulos entre sí: congruentes o distintos?
¿Puedes construir más triángulos que tengan un lado de 7 cm de largo y otro de 5 cm y que sean diferentes entre sí? _____

A lo que llegamos

Dadas las medidas de los tres lados, todos los triángulos que se pueden construir con esas medidas son congruentes entre sí.
Si se toman solamente las medidas de *dos lados*, se puede construir muchos triángulos diferentes entre sí que tengan dos lados con esas longitudes.

Las medidas de los lados del triángulo ABC son iguales a las medidas de los lados del triángulo DEF.
Marca del mismo color las parejas de lados que tienen la misma medida.
Marquen del mismo color las parejas de ángulos iguales.



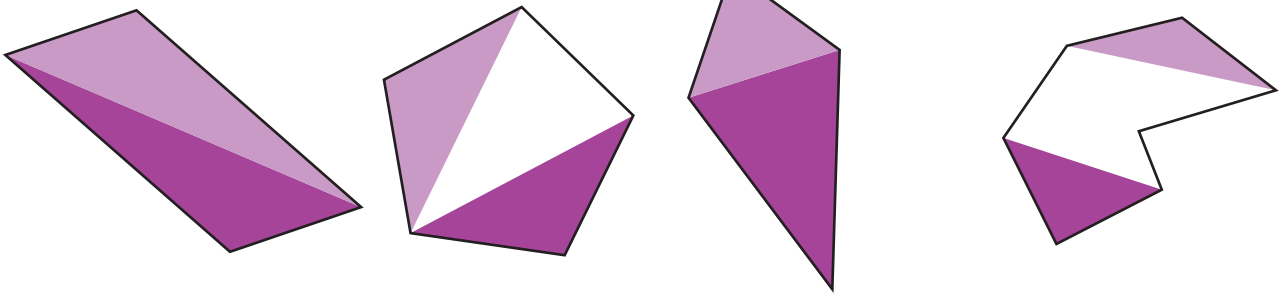
¿Son congruentes los triángulos ABC y DEF? _____

Completa las siguientes afirmaciones para que sean verdaderas:
El lado AB es el correspondiente del lado _____
El lado BC es el correspondiente del lado _____
El lado CA es el correspondiente del lado _____
El ángulo ABC es el correspondiente del ángulo _____
El ángulo BCA es el correspondiente del ángulo _____
El ángulo CAB es el correspondiente del ángulo _____

A lo que llegamos

Para que dos triángulos sean *congruentes* es suficiente que las medidas de los tres lados de un triángulo sean iguales a las medidas de los tres lados correspondientes de otro triángulo.
Éste es un *criterio de congruencia de triángulos* que se denota por *LLL*.

Palomea la figura en donde los triángulos resaltados son congruentes entre sí.

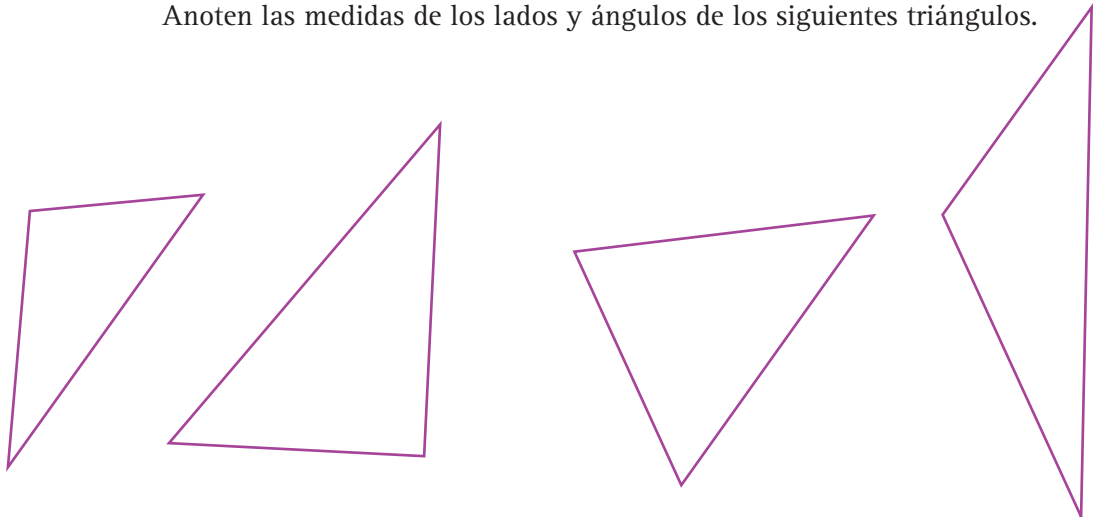


Paralelogramo | Pentágono regular | Papalote | Heptágono irregular

Un ángulo y dos lados correspondientes iguales

Consideremos lo siguiente

Has aprendido el criterio de congruencia LLL: dos triángulos son congruentes si las medidas de los tres lados de uno son iguales a las medidas de los tres lados correspondientes del otro. Para denotar que dos triángulos son congruentes se utiliza el símbolo $\equiv$. Y se escribe: Δ OAB $\equiv \Delta$ OCD. Y se lee: el triángulo OAB es congruente con el triángulo OCD.
Anoten las medidas de los lados y ángulos de los siguientes triángulos.



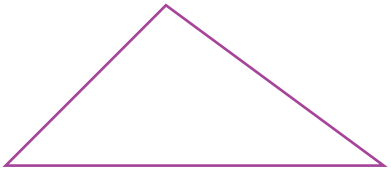
Triángulo 1 | Triángulo 2 | Triángulo 3 | Triángulo 4

¿Cuáles triángulos son congruentes entre sí? _____
¿Qué tienen en común los cuatro triángulos? _____

Recuerden que:

Si dos triángulos tienen *dos lados* correspondientes *iguales* y el *ángulo* entre ellos es *igual* al ángulo entre los correspondientes, entonces los triángulos son *congruentes*.
Éste es un segundo criterio de congruencia de triángulos se denota por *LAL*.

El siguiente triángulo tiene un lado de 5 cm, otro lado de 3 cm y el ángulo formado por esos dos lados mide 45º.



De forma individual realiza lo siguiente:
a) Marca los lados que miden 5 cm y 3 cm y el ángulo entre ellos.
b) ¿Cuánto mide su tercer lado?
c) ¿Cuánto miden sus otros dos ángulos?

Un lado y dos ángulos correspondientes iguales

Consideremos lo siguiente

Hay dos criterios para garantizar la congruencia de triángulos, el primero LLL, que es la igualdad de las medidas de los tres lados de un triángulo con las medidas de sus correspondientes lados en el otro triángulo, el segundo LAL, es la igualdad entre dos lados de un triángulo y el ángulo que forman entre ellos y sus correspondientes lados y ángulo.

Recuerden que:

Si dos triángulos tienen dos ángulos correspondientes iguales, no se puede garantizar que sean congruentes.
Si dos triángulos tienen sus tres ángulos correspondientes iguales, no se puede garantizar que sean congruentes.

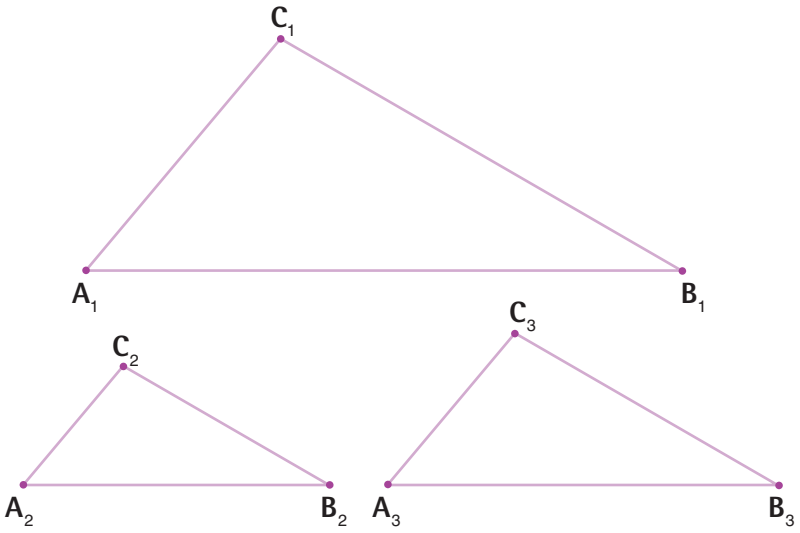
Manos a la obra

Realiza lo siguiente individualmente

1. Dibuja y recorta un triángulo de tal manera que dos de sus ángulos midan 60° y 90°, respectivamente. Con un compañero, compara los triángulos y después contesten las siguientes preguntas:

¿Cuánto mide el tercer ángulo en cada uno de los triángulos que trazaron?___
¿Cuánto miden los lados en cada uno de los triángulos que trazaron? _____
¿Se pueden construir más triángulos que cumplan con las condiciones pedidas y que sean diferentes a los que ya tienen? ____ ¿Por qué? _____

2. En cada triángulo, anoten las medidas de los ángulos internos y de los lados.



a) ¿Las medidas de los ángulos internos del triángulo $A_1B_1C_1$ son iguales a las medidas de los ángulos internos del triángulo $A_2B_2C_2$? _____ y ¿son iguales a las medidas de los ángulos internos del triángulo $A_3B_3C_3$? _____

b) ¿Cuánto miden los lados A_1C_1, A_2B_2, B_3C_3?_____
c) ¿Son congruentes los triángulos entre sí? _____ ¿por qué? _____

Recuerden que:

Si dos triángulos tienen *dos ángulos correspondientes iguales y el lado común a los ángulos mide lo mismo en ambos triángulos*, entonces podemos asegurar que los triángulos son congruentes. Éste es el tercer criterio de congruencia de triángulos que se denota por *ALA*. Entonces ya *no* es necesario probar la igualdad del tercer ángulo.

De manera individual realiza la siguiente actividad:

1. Traza en tu cuaderno un triángulo de manera que dos de sus ángulos midan 70° y 40°, respectivamente, y que el lado común a los dos ángulos mida 5 cm.

a) ¿Cómo son entre si los triángulos que trazaste, congruentes o diferentes? _____

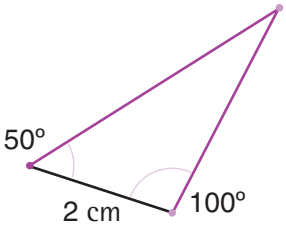
_____

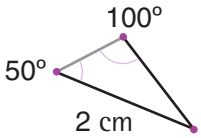
b) ¿Puedes trazar dos triángulos diferentes y que cumplan con las condiciones pedidas?

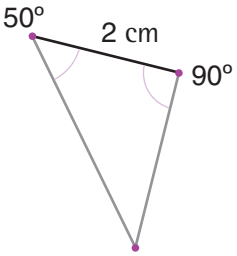
_____

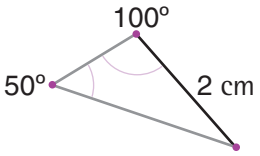
c) ¿Cuánto mide el tercer ángulo en cada uno de los triángulos que trazaste?

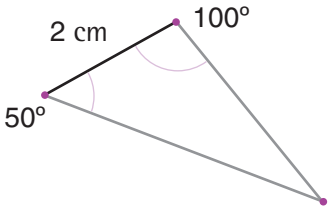
2. De los siguientes triángulos, encierra el que sea congruente con el morado.







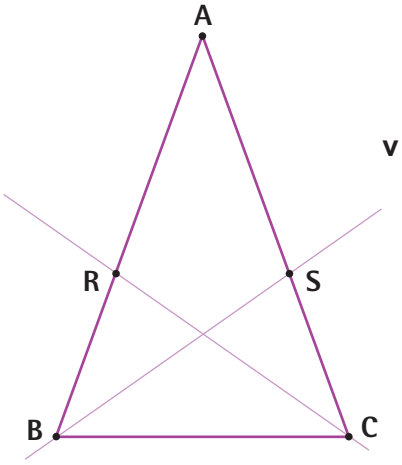




Recuerden que:

La *bisectriz* de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.

En el siguiente triángulo isósceles se trazaron las bisectrices de los ángulos iguales ABC y ACB, respectivamente.



¿Son congruentes los triángulos ABS y ACR? _____ ¿por qué? _____

Sesión 15

Puntos y rectas notables del triángulo

Propósito

Explorarás las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.

Para empezar

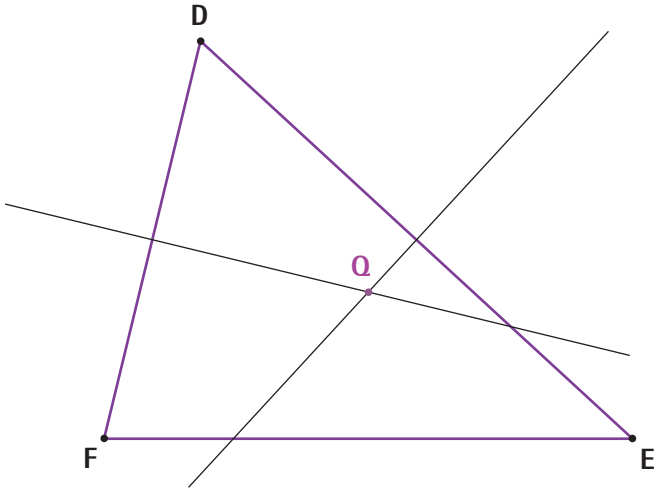
Mediatrices

Anteriormente aprendiste que la *mediatriz* de un segmento es *la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio. Los puntos* que están sobre la mediatriz *equidistan de los extremos* del segmento.

Manos a la obra

Realiza la siguiente actividad.

1. En el siguiente triángulo se trazaron las mediatrices de los lados FD y DE. El punto Q es la intersección de estas mediatrices.



¿Cómo son entre sí las distancias del punto D al Q y el punto F al Q? _____ ¿Por qué?_____

¿Cómo son entre sí las distancias del punto D al Q y el punto E al Q? _____ ¿Por qué?_____

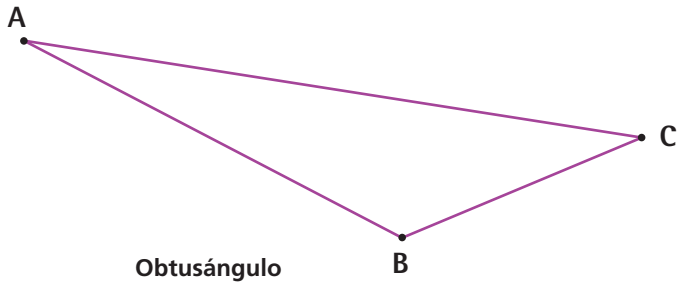
¿Consideran que la mediatriz del lado FE pasará por el punto Q? _____

¿Por qué?_____

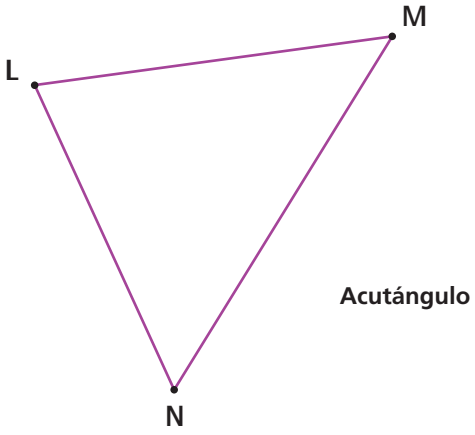
Recuerden que:

Las tres mediatrices de un triángulo pasan por un mismo punto. Ese punto se llama *circuncentro del triángulo.*

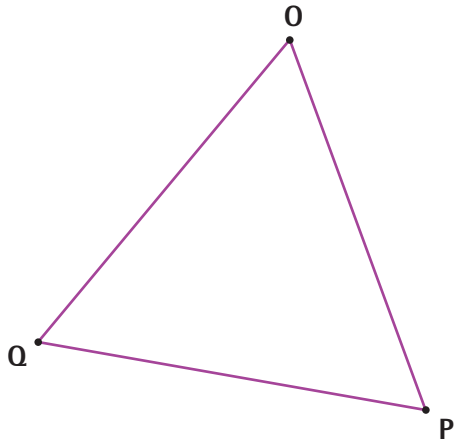
2. Traza en cada uno de los siguientes triángulos sus mediatrices:



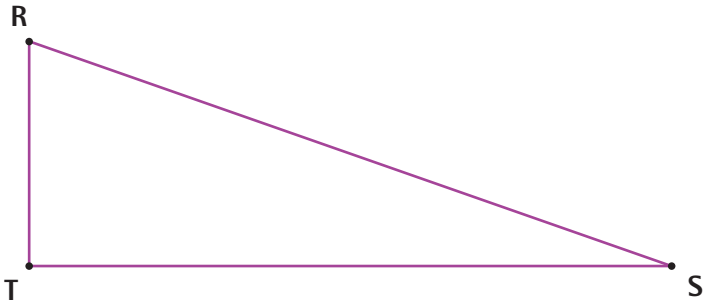
Obtusángulo



Acutángulo



Equiángulo

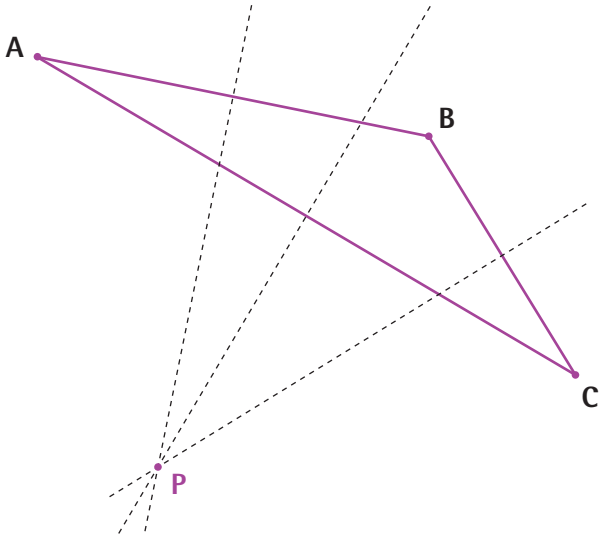


Rectángulo

Completa con Sí o No la siguiente tabla:

Tipo de triángulo	El circuncentro queda dentro del triángulo	El circuncentro queda fuera del triángulo	El circuncentro queda en un lado del triángulo	Las mediatrices pasan por los vértices del triángulo
Obtusángulo				
Acutángulo				
Equiángulo				
Rectángulo				

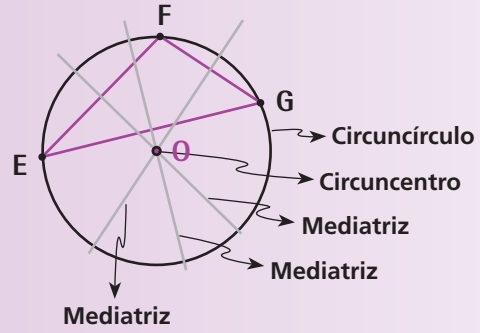
3. En el triángulo ABC traza un círculo que tenga como centro el punto P y como radio la distancia que hay del punto P al vértice A.



Este círculo pasa también por B y por C, ¿a qué crees que se deba?_____

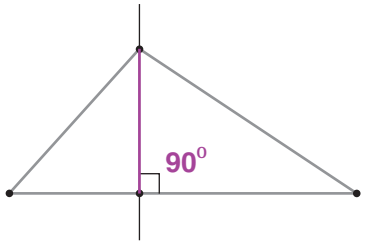
A lo que llegamos

El *circuncentro* de un triángulo equidista de sus vértices y es el centro del círculo que pasa por sus tres vértices. A este círculo se llama *circuncírculo* del triángulo. El circuncentro de un triángulo puede quedar *dentro* del triángulo, *en él* o *fuera de él*, según sea éste *acutángulo, rectángulo* u *obtusángulo*.



Alturas

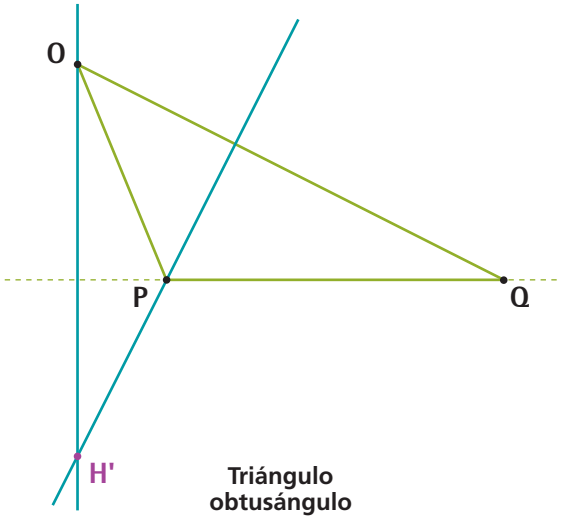
Una *altura* en un triángulo es el *segmento* perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto o a la prolongación de éste.



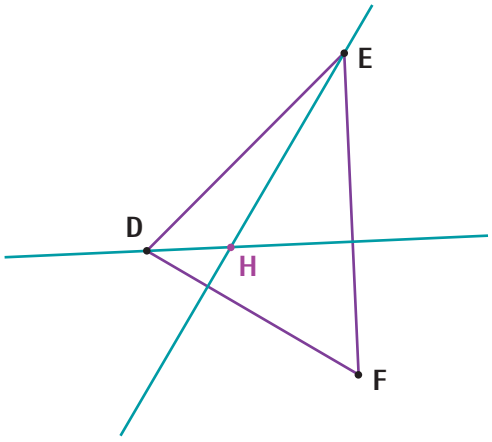
Manos a la obra

Realiza la siguiente actividad.

1. En los siguientes triángulos se trazaron las rectas determinadas por dos de sus alturas. Traza la recta determinada por la tercera altura en cada triángulo.



Triángulo obtusángulo



Triángulo acutángulo

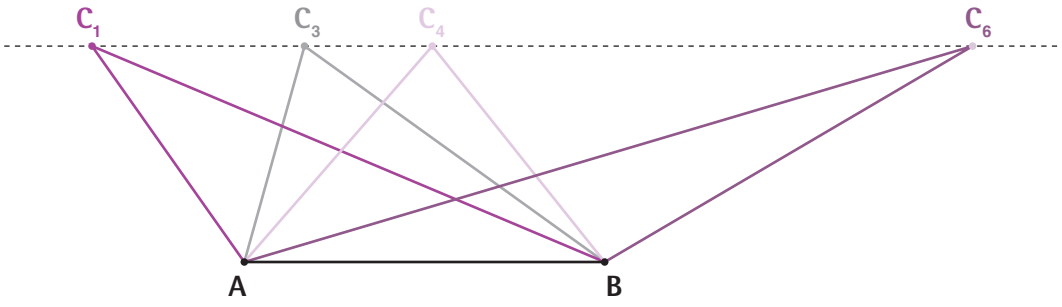
¿La recta determinada por la altura desde el vértice Q pasa por el punto H'?
¿La recta determinada por la altura desde el vértice F pasa por el punto H?

A lo que llegamos

Un triángulo tiene *tres alturas*, una por cada lado.

Las *tres rectas* determinadas por las alturas de un triángulo *pasan por un mismo punto*. A ese punto se le llama *ortocentro* del triángulo. En un triángulo escaleno, el ortocentro queda fuera del triángulo; en un triángulo equilátero, el ortocentro queda dentro del triángulo y en un triángulo rectángulo, el ortocentro es uno de sus vértices.

2. En el diagrama se muestran los triángulos: AC_1B, AC_3B, AC_4B y AC_6B.



¿Cuál de ellos tiene mayor área? _____ ¿Por qué? _____
_____

Medianas

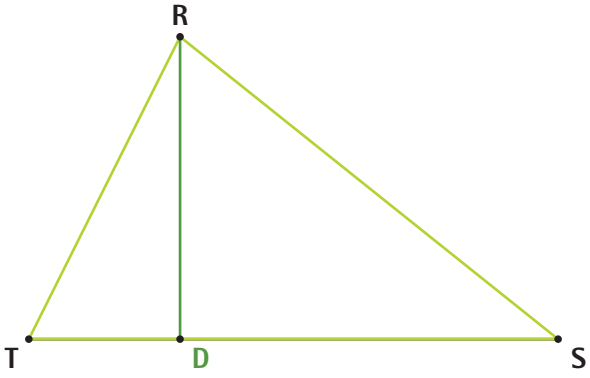
Recuerden que:

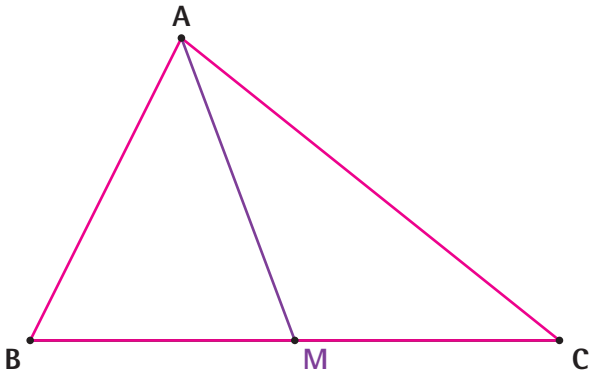
En un triángulo, a los segmentos que van de un vértice al punto medio del lado opuesto se les llama *medianas* del triángulo. Una *mediana divide al triángulo en dos triángulos de igual área.*

Manos a la obra

1. Realiza lo que se te pide.

En los siguientes triángulos toma como base los lados TS y BC, respectivamente. Mide y traza lo que consideres necesario en cada triángulo y completa la siguiente tabla y contesta las preguntas.





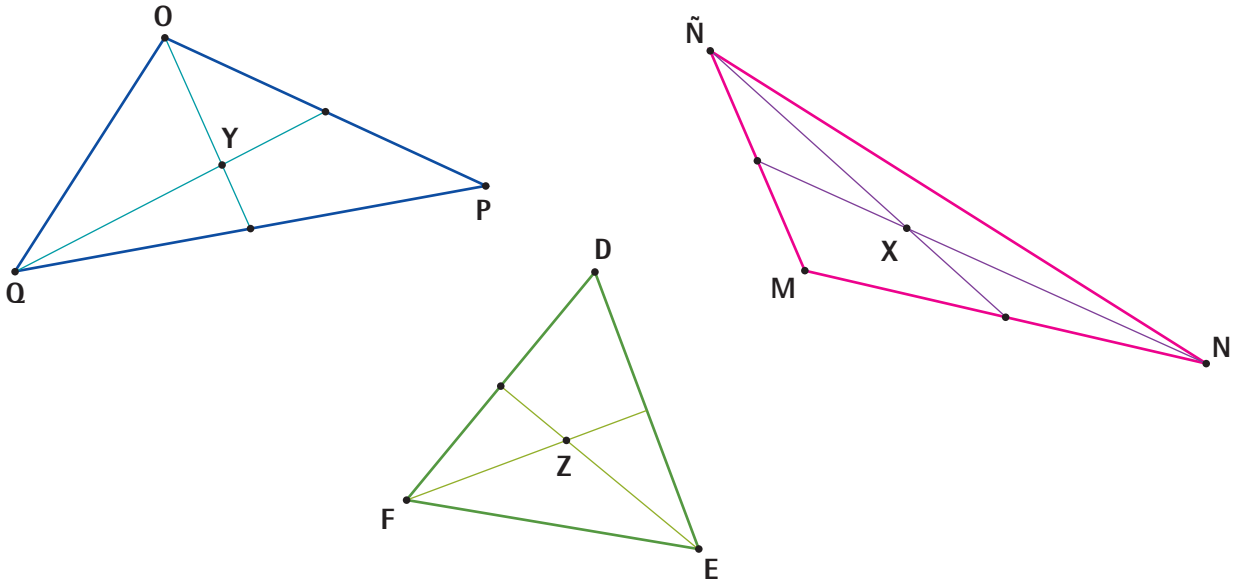
¿Cuánto mide?	Triángulo verde		Triángulo morado	
	Triángulo RTD	Triángulo RDS	Triángulo ABM	Triángulo AMC
Base				
Altura				
Área				

a) ¿Cómo son entre sí las áreas de los triángulos RTD y RDS?_____

c) ¿Cómo son entre sí las áreas de los triángulos ABM y AMC? _____

c) ¿Cuál de las dos rectas dividió al triángulo correspondiente en dos triángulos de igual área, la determinada por R y D o la determinada por A y M? _____

2. Traza la mediana que falta en los siguientes triángulos:



¿La mediana que trazaron en el triángulo 1 pasa por el punto X? _____
¿La mediana que trazaron en el triángulo 2 pasa por el punto Y? _____
¿La mediana que trazaron en el triángulo 3 pasa por el punto Z? _____

A lo que llegamos

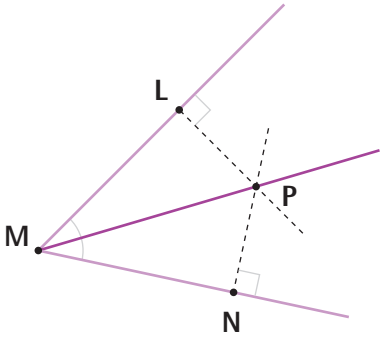
Las medianas de un triángulo lo dividen en 6 triángulos que tienen la misma área. Por esto, el triángulo se equilibra cuando coincide el baricentro (que es el *centroide*) con la punta del lápiz. Esta característica le da al *baricentro* el nombre de *gravicentro* o centro de masa.

Bisectrices

Consideremos lo siguiente

Responde individualmente las siguientes preguntas:
a) ¿Qué es un ángulo?_____
b) ¿Qué es la bisectriz de un ángulo? _____

Los puntos de la bisectriz de un ángulo *equidistan* de los lados del ángulo.



P es un punto de la bisectriz del ángulo LMN. Comprueben que P esté a la misma distancia del lado LM que del lado MN.

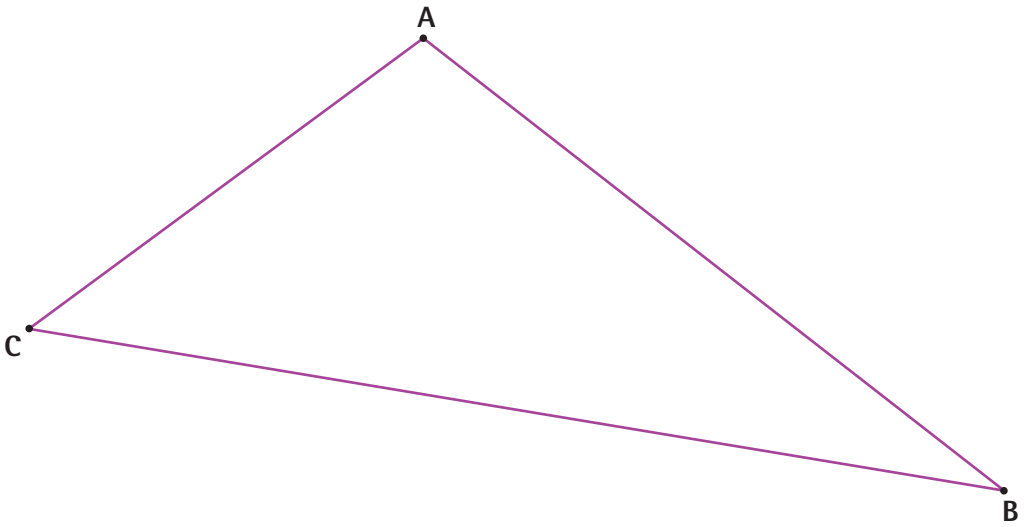
Recuerden que:

La distancia de un punto a una recta se mide por el segmento perpendicular que va del punto a la recta.

Manos a la obra

Realiza lo siguiente.

1. Traza las mediatrices y las medianas del siguiente triángulo.



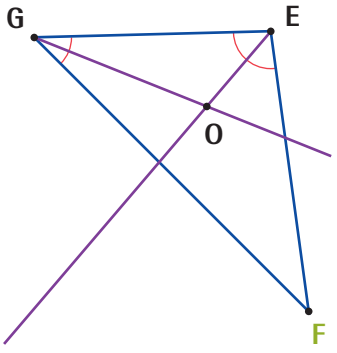
¿El punto determinado por las mediatrices del triángulo equidista de sus lados? _____

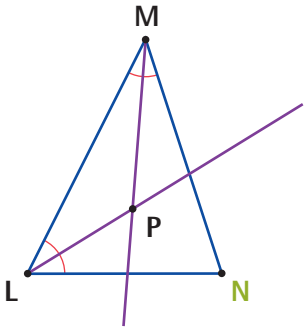
_____

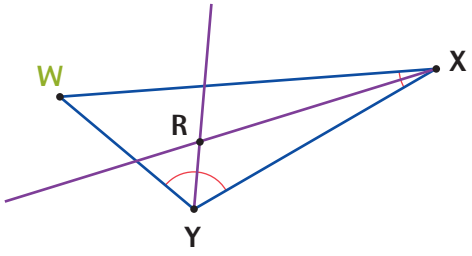
¿El punto determinado por las medianas del triángulo equidista de sus lados? _____

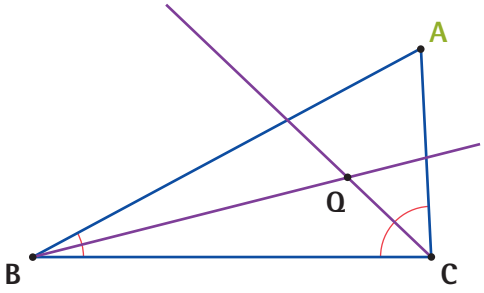
_____

2. En los siguientes triángulos se trazaron las bisectrices de dos de sus ángulos y los puntos en los que esas bisectrices se cortan. Traza en cada triángulo la bisectriz del tercer ángulo.



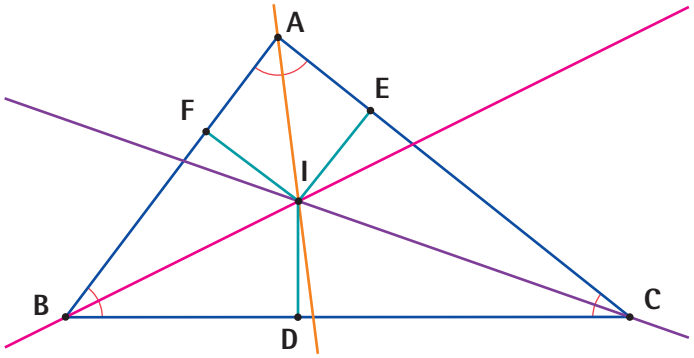






a) ¿La bisectriz del ángulo GFE pasa por el punto O? _____
b) ¿La bisectriz del ángulo LNM pasa por el punto P? _____
c) ¿La bisectriz del ángulo XWY pasa por el punto R? _____
d) ¿La bisectriz del ángulo BAC pasa por el punto Q? _____

3. En el siguiente triángulo se trazaron sus tres bisectrices y las perpendiculares del punto I a los lados del triángulo.



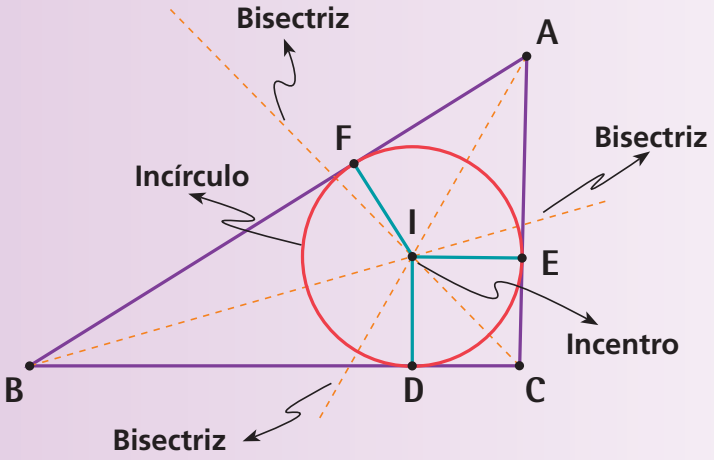
Traza un círculo con centro en I y radio IE.
Compara los trazos
¿El círculo pasa también por los puntos D y F? _____
¿El círculo toca al lado BC en un punto distinto a D? _____
¿El círculo toca al lado CA en un punto distinto a E? _____
¿El círculo toca al lado AB en un punto distinto a F? _____

Recuerden que:

Al círculo que está dentro del triángulo y que sólo toca a sus tres lados en tres puntos, uno por cada lado, se le llama *incírculo* o círculo inscrito en el triángulo.

A lo que llegamos

Los triángulos tienen *tres bisectrices*, una por cada uno de sus ángulos internos. Las tres bisectrices de un triángulo *se cortan en un punto que equidista de los tres lados del triángulo*. A ese punto se le llama *incentro*, ya que es el centro de un círculo inscrito en el triángulo.



Sesión 16

Eventos independientes

Propósito

Distinguirás en diversas situaciones de azar eventos que son independientes, también determinarás la forma en que se puede calcular la probabilidad de ocurrencia de dos o más eventos independientes.

Para empezar

¿Cuáles son los eventos independientes?

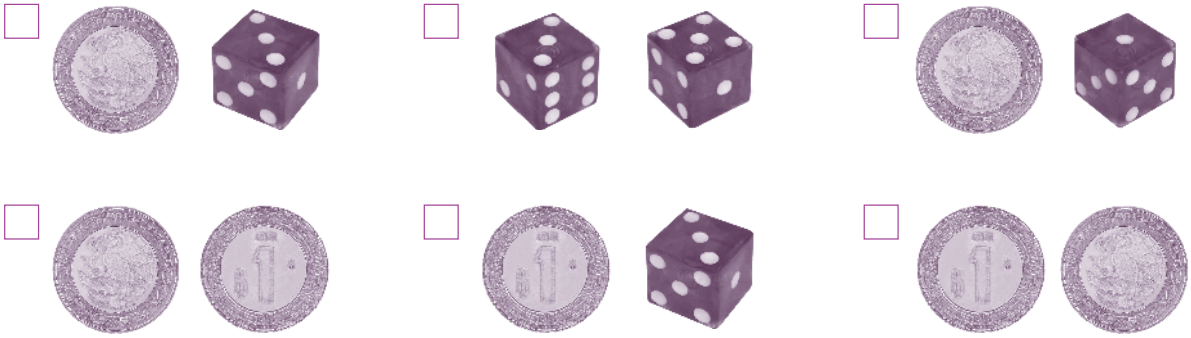
Se dice que *dos eventos son independientes si la ocurrencia de uno de los eventos no afecta al valor de la probabilidad de ocurrencia del otro*. Por lo que, la probabilidad de que los dos eventos ocurran simultáneamente es *igual* al producto de la probabilidad de un evento por la del otro.

Manos a la obra

De manera individual realiza lo que se pide.

1. Lanza una moneda y un dado, al mismo tiempo, y observa la figura y el número de las caras superiores que caen en la moneda y en el dado.

¿Cuáles de los siguientes resultados corresponden al de tu experimento anterior? Márcalos con una paloma



¿Cuántos resultados posibles hay en este experimento?

Al lanzar al mismo tiempo la moneda y el dado, tres eventos que se pueden observar son:

A: "En la moneda cae águila".

B: "En el dado cae 1".

C: "En la moneda cae águila y en el dado cae 1".

Si al realizar una vez el experimento en la moneda cae águila y en el dado cae 2, ¿a cuál de los tres eventos es favorable este resultado?

_____

¿Cuál es un resultado favorable al evento B?

_____

¿Cuántos resultados son favorables al evento C: "en la moneda cae águila y en el dado cae 1"? _____

¿Cuál es la probabilidad del evento C? _____

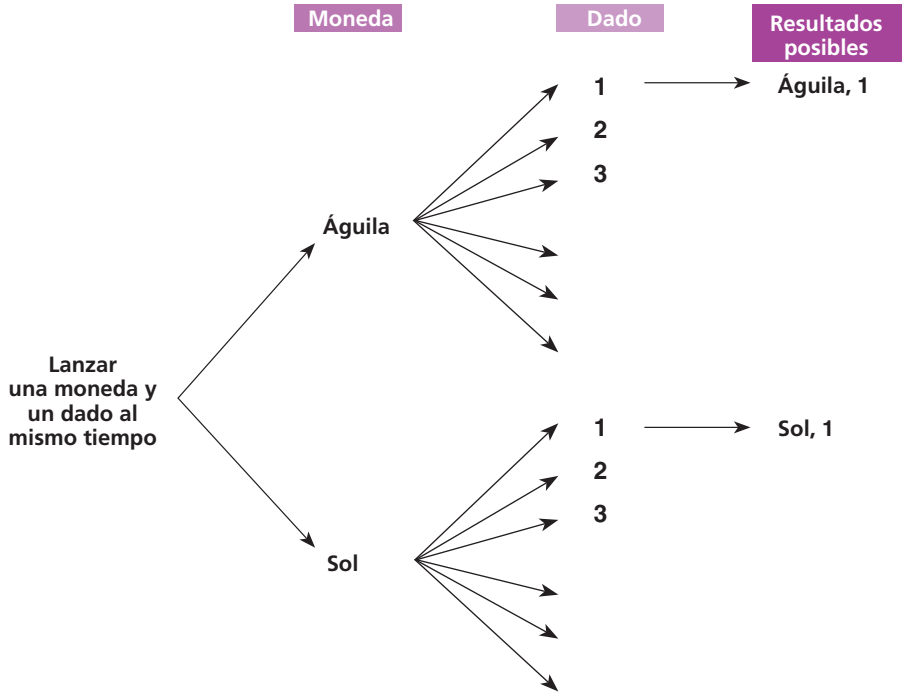
En el experimento de lanzar al mismo tiempo la moneda y el dado, consideras que si en la moneda cae águila afecta el resultado que cae en el dado. ¿Por qué? _____

Recuerden que:

Para obtener la probabilidad clásica de un evento se requiere conocer el número total de resultados posibles que se pueden obtener en el experimento y el número de resultados favorables del evento.

$$P(E) = \frac{\text{número de resultados favorables del evento}}{\text{número total de resultados posibles}}$$

3. Completa el diagrama de árbol, que corresponde a todos los resultados posibles del experimento: lanzar una moneda y un dado, al mismo tiempo.



En total para este experimento, ¿cuántos resultados posibles hay? _____

¿En cuántos de esos resultados posibles en la moneda cae águila? Márcalos con color rojo en el diagrama.

En este experimento, ¿cuál es la probabilidad del evento A: "en la moneda cae águila"?

_____

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados favorables del evento}}{\text{número total de resultados posibles}}$$

$$P(A) = \frac{\quad}{\quad}$$

¿En cuántos de los resultados posibles en el dado cae 1? Márcalos con color azul en el diagrama

¿Cuál es la probabilidad del evento B: "en el dado cae 1"? _____

$$P(B) = \frac{\text{número de resultados favorables del evento}}{\text{número total de resultados posibles}}$$

$$P(B) = \frac{\quad}{\quad}$$

¿En cuántos de los resultados posibles la moneda cae en águila y el dado en 1, es decir, caen águila y 1, al mismo tiempo? _____
¿Cuál es la probabilidad del evento C: "en la moneda cae águila y en el dado cae 1"? __
_____
P(C) = _____
Multiplica las probabilidades de los eventos: "en la moneda cae águila" y "en el dado cae 1". P(A) × P(B)= _____ × _____ = _____
Compara el valor de la probabilidad del evento C: "en la moneda cae águila y en el dado cae 1" con el producto de las probabilidades de los dos eventos que obtuvieron en el inciso anterior. ¿Son iguales o diferentes? _____
P(en la moneda cae águila y en el dado cae 1) ____P(en la moneda cae águila) × P(en el dado cae 1) = P(C) ____P(A) × P(B)

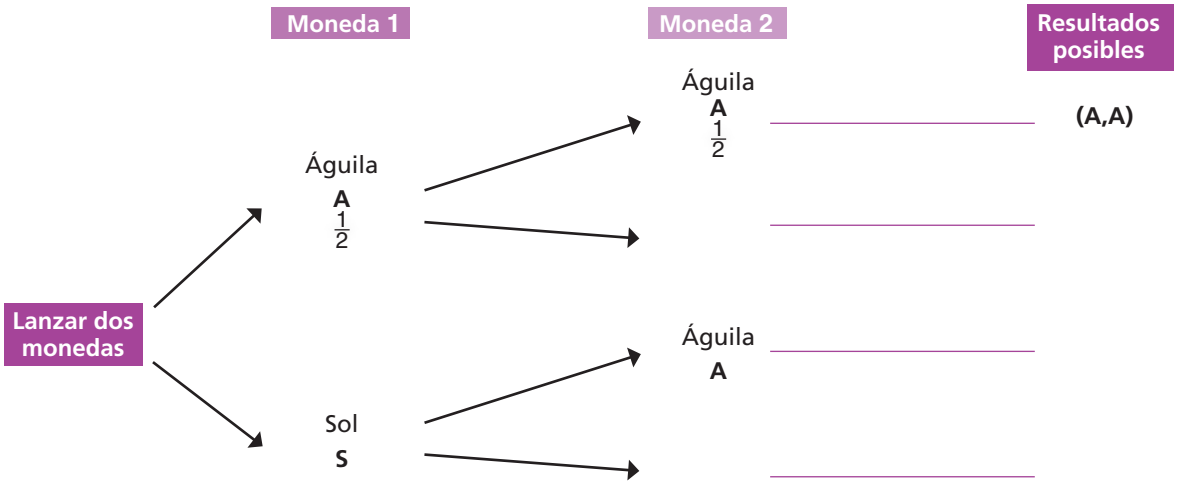
Dos o más eventos independientes

En el experimento de lanzar dos monedas al aire, se están considerando dos monedas en las que sus caras tienen la misma probabilidad de ocurrir, es decir, son *equiprobables*. En general, cuando en un experimento de azar ocurre lo anterior, se dice que las monedas son *no trucadas* o *legales*.

Manos a la obra

Realiza lo siguiente.

1. Completen el siguiente diagrama de árbol con los resultados diferentes que pueden obtenerse al lanzar dos monedas al aire.



Recuerden que:

Dos eventos son independientes si la ocurrencia de uno de los eventos no afecta al valor de la probabilidad de ocurrencia del otro. Por lo que la probabilidad de que los dos eventos ocurran simultáneamente es igual al producto de la probabilidad de un evento por la del otro.

En total, ¿cuántos resultados posibles hay? _____
Si en la primera moneda cae sol, ¿qué resultados pueden caer en la segunda moneda?
_____
¿Cuántos resultados favorables hay para el evento: "Cae sol en la primera moneda"?
_____
¿Cuántos resultados favorables hay para el evento: "Cae sol en la segunda moneda"?
_____
¿Cuál es la probabilidad del evento: "Cae sol en la primera moneda"? P(caer sol en la primera moneda) =_____
¿Cuál es la probabilidad del evento: "Cae sol en ambas monedas"? P(cae sol en ambas monedas) = _____
Multiplica las probabilidades de los eventos: "Cae sol en la primera moneda" y "Cae sol en la segunda moneda".
P(cae sol en la primera moneda) × P(cae sol en la segunda moneda) =
_____ × _____ = _____

2. Se lanzan tres monedas al mismo tiempo y se observa la sucesión de águilas y soles que caen.
En tu cuaderno, elabora el diagrama de árbol con los resultados diferentes que se obtienen al lanzar tres monedas al aire. ¿En total, cuántos resultados posibles diferentes hay?
_____
Si en la segunda moneda cae águila, ¿qué resultados pueden caer en la tercera moneda?
_____
Si en la tercera moneda cae sol, ¿qué resultados pueden caer en la segunda moneda? __
_____
Y cuáles en la primera _____
¿Cuántos resultados favorables hay para el evento: "Cae sol en las tres monedas"? ___
_____
¿Cuál es la probabilidad del evento: "Cae sol en las tres monedas"? _____
Calcula la probabilidad de los siguientes eventos:
P(cae sol en la primera moneda) =_____
P(cae águila en la segunda moneda) = _____
P(cae sol en la tercera moneda) = _____
Multiplica las probabilidades de los tres eventos que calculaste en el inciso anterior.
P(cae sol en la primera moneda) × P(cae sol en la segunda moneda) × P(cae sol en la tercera moneda) = _____× _____ × _____ = _____
Compara la probabilidad del evento: "Cae sol en las tres monedas" con el producto de las probabilidades de los tres eventos que obtuviste en el inciso anterior. ¿Son iguales o diferentes?

A lo que llegamos

Cuando un mismo experimento se repite *dos o más veces*, y los eventos que se observan tienen probabilidades iguales y son independientes, entonces el producto de las probabilidades es una *potencia*.

Sesión 17

Sistemas de ecuaciones

Propósito

Representarás con letras (llamadas *literales*) los valores desconocidos de un problema y las usarás para plantear y resolver un sistema de ecuaciones con coeficientes enteros.

Para empezar

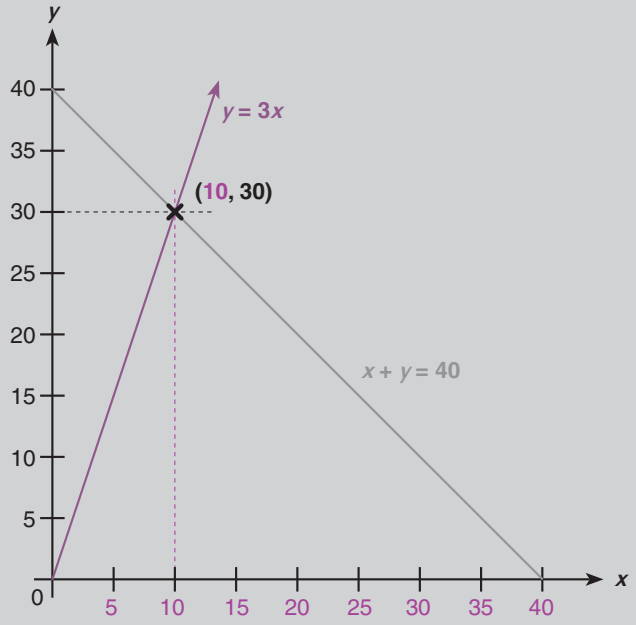
Don Matías se dedica a la crianza de vacas y chivos. Raúl le pregunta a su padre: —¿Papá cuántas vacas y chivos tenemos?
El padre le dice: —Te voy a dar dos pistas para que encuentres cuántos chivos y cuántas vacas tenemos. Primera pista: en total tenemos 68 animales entre chivos y vacas. Segunda pista: el número de chivos es el *triple* que el número de vacas.
¿Cuántos animales de cada tipo tiene don Matías?
Chivos:_____
Vacas:_____

Recuerden que:

Para resolver un problema que involucre dos incógnitas y dos ecuaciones, hay que buscar *dos valores que satisfagan las dos ecuaciones al mismo tiempo.*
Si se grafican las ecuaciones, el *punto de intersección* de las gráficas corresponde a la solución del problema.
Por ejemplo, si las ecuaciones de un problema son:

Ecuación 1: $x + y = 40$
Ecuación 2: $y = 3x$

Al graficar las ecuaciones se obtienen las siguientes rectas:



El punto de intersección de las rectas corresponde a la solución del problema $x = 10$ y $y = 30$. Estos valores satisfacen al mismo tiempo las dos ecuaciones.

Manos a la obra

1. Para saber cuántos animales de cada tipo tiene don Matías, se requiere que las parejas de números (tanto de chivos como de vacas) cumplan con la primera pista:
En total tenemos 68 animales entre chivos y vacas.
Completa la Tabla 1 para mostrar algunas parejas de números que cumplan con la primera pista: Considera que:

- x representa el número de chivos.
- y representa el número de vacas.

Número de chivos: x	Número de vacas: y	Pareja (x, y)
34		(34, _____)
35		
40		
	18	
	17	
60		

Tabla 1

¿Cuál es la ecuación que representa a la primera pista? _____

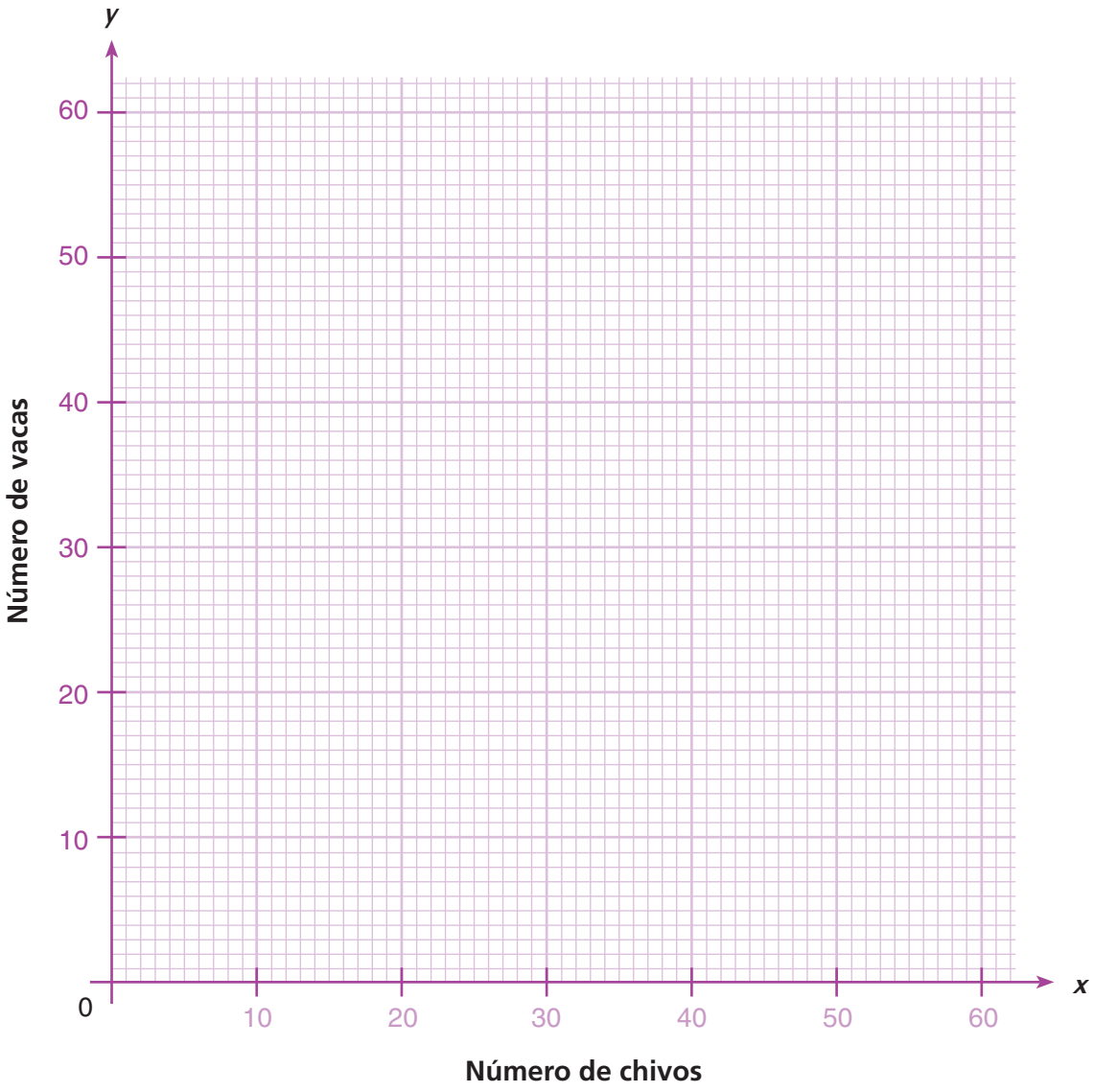
2. Ahora encuentra otras parejas de números que cumplan con la segunda pista dada por don Matías: el número de chivos es el triple que el número de vacas. Completa la Tabla 2.

Número de chivos: x	Número de vacas: y	Pareja (x, y)
30		
33		
	12	
39		
	20	
	15	
51		

Tabla 2

¿Cuál es la ecuación que representa la segunda pista? _____
¿Cuál pareja cumple con las dos pistas? _____

3. Representa en el plano siguiente las parejas que obtuviste en las tablas 1 y 2.
Con un color une los puntos que graficaste para la Tabla 1.
Con un color distinto une los puntos que graficaste para la Tabla 2.



Gráfica 1

Método de sustitución

Consideremos lo siguiente

Una manera de resolver un sistema de ecuaciones es por el *método de sustitución* que, como su nombre lo indica, consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituir el resultado en la otra ecuación.

Por ejemplo, para resolver por sustitución el sistema:

Ecuación 1: $x + y = 95$

Ecuación 2: $y = 3x - 5$

Se hace lo siguiente:

1. Se sustituye la incógnita y por $3x - 5$ en la Ecuación 1.	E1: $x + y = 95$ $x + (3x - 5) = 95$
2. Se resuelve la ecuación obtenida.	$4x - 5 = 95$ $4x = 95 + 5$ $4x = 100$ $x = 25$
3. Para encontrar el valor de y, se sustituye el valor de x en cualquiera de las ecuaciones. Si se sustituye en la ecuación 2, queda:	E2: $y = 3x - 5$ $y = 3(25) - 5$ $y = 75 - 5$ $y = 70$
4. Se comprueba las solución sustituyendo los valores encontrados de x y de y en las dos ecuaciones.	
E1: $x + y = 95$ $(25) + (70) = 95$ $95 = 95$	E2: $y = 3x - 5$ $(70) = 3(25) - 5$ $70 = 75 - 5$ $70 = 70$

Manos a la obra

La edad de don Matías es igual a cuatro veces la edad de Raúl. La suma de sus edades es 70 años.

¿Cuántos años tiene don Matías? _____

¿Cuál es la edad de Raúl? _____

1. Realiza las actividades y contesta lo que se pide.

Para conocer las edades de don Matías y Raúl se puede utilizar el *método de sustitución algebraica*, el cual plantea dos ecuaciones: la ecuación 1 se escribe como: $x = 4y$. Esta ecuación indica que el valor de x es igual a 4 veces el valor de y.

En la ecuación 2, sustituye x por $4y$ y resuelve la ecuación que se obtiene después de esta sustitución.

Ecuación 2: $x + y = 70$

Sustitución ( ) $+ y = 70$

Como resultado de la sustitución obtuviste una ecuación de una incógnita.

Resuélvela y encuentra el valor de y. $y =$ _____

Encuentra el valor de x. $x =$ _____

Para comprobar los valores que encontraste, sustituye en las ecuaciones 1 y 2 los valores de x, así como los de y que hallaste.

E1: $x + y = 70$

$(\quad) + (\quad) = 70$

$_____ = 70$

E2: $x = 4y$

$(\quad) = 4(\quad)$

$56 = _____$

¿Son verdaderas las igualdades que obtuvieron? _____ ¿Por qué razón? _____
_____

Una vez que encontraron el valor de y, ¿cómo encontraron el valor de x? ____
_____

Método de suma o resta

Consideremos lo siguiente

Don Matías fue al mercado a vender gallinas y conejos. Doña Lupe le compró 5 gallinas, 3 conejos y pagó por ellos $425.00. Don Agustín le compró 3 gallinas, 3 conejos y pagó $309.00.

Recuerden que:

Cuando en las dos ecuaciones de un sistema los *coeficientes* de una misma incógnita *son iguales o sólo difieren en el signo*, conviene aplicar el *método de suma o resta*.

Por ejemplo, para resolver el siguiente sistema.

E1: $5x + 2y = 70$ Se *suman* uno a uno los *términos* de las dos ecuaciones

E2: $3x - 2y = -14$ y se cancelan los términos que tienen y.

$8x + 0y = 56$

$8x = 56$ Se resuelve la ecuación obtenida

$x = 7$ y se encuentra el valor de x.

E1: $5x + 2y = 70$ En cualquiera de las ecuaciones, se sustituye el valor

$5(7) + 2y = 70$ obtenido para x, se resuelve la ecuación resultante

$2y = 70 - 5(7)$ y se encuentra el valor de y.

$2y = 35$

$y = 17.5$

La solución se verifica sustituyendo los valores de x así como de y en ambas ecuaciones.

Manos a la obra

¿Cuál de los siguientes sistemas corresponde al problema anterior?

E1: $x + y = 425$	E1: $8xy = 425$	E1: $5x + 3y = 425$
E2: $x + y = 309$	E2: $6xy = 309$	E2: $3x + 3y = 309$
Sistema 1	Sistema 2	Sistema 3

Cuando en ambas ecuaciones de un sistema una incógnita tiene el mismo coeficiente, conviene aplicar el *método de suma o resta* para eliminarla y simplificar el sistema.

Resta las ecuaciones 1 y 2 que escogiste para eliminar a la incógnita que tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones.
Completa.

Ecuación 1: _____ + _____ = 425
Ecuación 2: _____ + _____ = 309
_____
_____ + _____ = 116

Encuentra el valor de x en la ecuación que obtuviste. x = _____
Encuentra el valor de y. y = _____

Gastos de doña Lupe	Gastos de don Agustín
5 gallinas de $ _____ cada una = $ _____	**3** gallinas de $ _____ cada una = $ _____
3 conejos de $ _____ cada una = $ _____	**3** conejos de $ _____ cada uno = $ _____
Total $ _____	Total $ _____

Cuando en ambas ecuaciones los coeficientes de una misma incógnita sólo difieren en el signo, también conviene aplicar el *método de suma o resta*. Por ejemplo, para resolver el sistema:

Ecuación 1: $5x + 3y = 425$
Ecuación 2: $3x - 3y = 39$

conviene *sumar* las dos ecuaciones para eliminar los términos $+ 3y$ y $- 3y$ y simplificar el sistema.
Suma las ecuaciones 1 y 2.Completa.

Ecuación 1: $5x + 3y = 425$

Ecuación 2: $3x - 3y = 39$

_____
___+___ =_____

Encuentra el valor de x en la ecuación que obtuviste. x = _____
Encuentra el valor de y. y = _____
Verifica su solución sustituyendo en ambas ecuaciones los valores de x y de y que encontraron.

La igualación

Consideremos lo siguiente

Cuando en un sistema la *misma incógnita está despejada* en las dos ecuaciones, conviene aplicar el *método de igualación*. Para eso hay que *igualar* las dos expresiones algebraicas equivalentes a la incógnita despejada.

Por ejemplo, para resolver por igualación el sistema: $E1: x = \frac{75 - 3y}{2}$ $E2: x = 25 + y$	
1. Se igualan las expresiones obtenidas mediante el despeje para la incógnita *x*.	$\frac{75 - 3y}{2} = 25 + y$
2. Se resuelve la ecuación para obtener el valor de *y*.	$75 - 3y = 2(25 + y)$ $75 - 3y = 50 + 2y$ $75 - 50 = 2y + 3y$ $25 = 5y$ $5 = y$
3. Para encontrar el valor de *x*, se sustituye el valor de *y* en cualquiera de las ecuaciones. Por ejemplo, sustituyendo en la ecuación 2 queda:	$x - y = 25$ $x - (5) = 25$ $x = 25 + 5$ $x = 30$
4. Se comprueba las solución sustituyendo los valores encontrados de *x* y de *y* en las dos ecuaciones.	

Algunas veces, antes de aplicar el *método de igualación* hay que despejar alguna de las incógnitas. Realiza las siguientes actividades para resolver por igualación el sistema:

Ecuación 1: $2x + 3y = 300$
Ecuación 2: $x = y - 30$

¿Cuál de las siguientes ecuaciones se obtiene al despejar la incógnita x de la ecuación 1? Subráyenla.

$x = (300-3y)-2$

$x = 150-3y$

$x = \frac{(300-3y)}{2}$

Iguala las expresiones que obtuviste para la incógnita x. Completa la ecuación.

_____ $= y - 30$

Resuelve la ecuación que se obtiene.

¿Cuánto vale x? _____

¿Cuánto vale y? _____

Resuelve por el método de igualación el siguiente sistema de ecuación:

Ecuación 1: $m = \frac{(7n-4)}{8}$

Ecuación 2: $m = \frac{(3n+6)}{6}$

Sesión 18.

Traslación, rotación y simetría central

Propósito

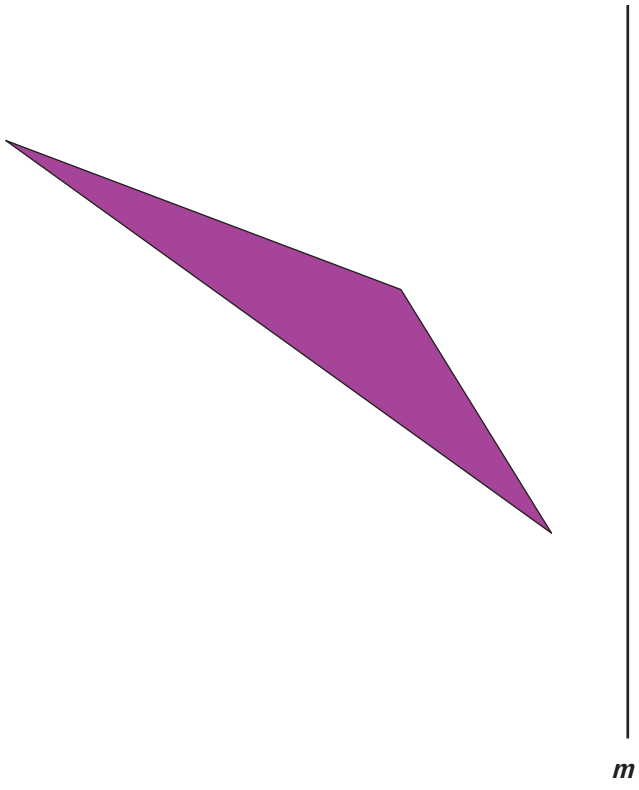
Determinarás las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras. Construirás y reconocerás diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

Para empezar

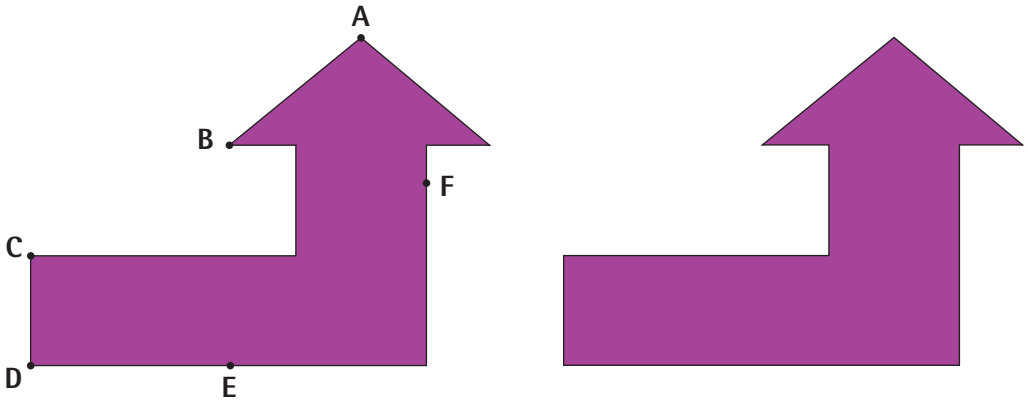
Estudiaste que un punto es simétrico a otro con respecto a una recta si se cumple que ambos puntos equidistan de la recta y el segmento que los une es perpendicular a ella. Cuando se traza el simétrico de una figura con respecto a un eje, se conservan las longitudes y los ángulos de la figura original.

Manos a la obra

1. Traza el simétrico del triángulo con respecto a la recta *m*. Utiliza tu juego de geometría.



2. Responde las preguntas.



Encuentra el vértice que corresponde al vértice A y el que corresponde al vértice B en la otra figura, nómbralos A' y B', respectivamente. Usa tu regla para unir A con A' y B con B', al hacerlo obtienes los segmentos AA' y BB'. Anota en la figura la distancia entre A y A' y entre B y B'.

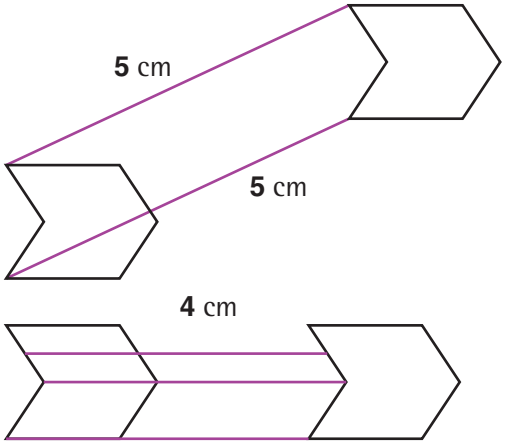
Si prolongamos los segmentos AA' y BB', ¿las rectas que se obtienen son paralelas o perpendiculares? _____

Encuentra los vértices correspondientes a los vértices C, D, E, y F. Nómbralos C', D', E', y F', respectivamente. Anota en la figura la distancia entre C y C', entre D y D', E y E', y entre F y F'.

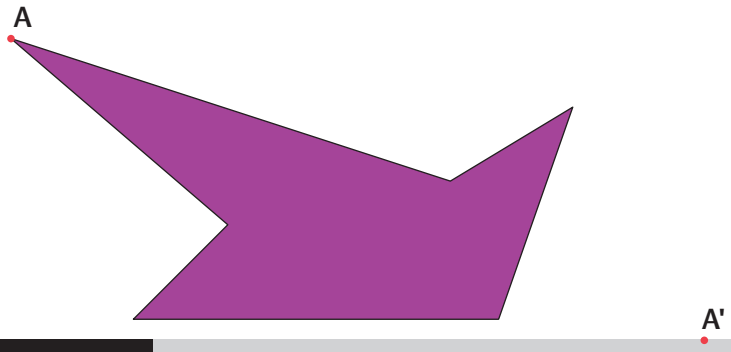
¿Cuál es el lado correspondiente al lado AB? _____
¿Cuál es el lado correspondiente al lado CD? _____
Si prolongamos el lado AB y su correspondiente lado en la otra figura, ¿cómo son, entre sí, las rectas que se obtienen? _____
Si prolongamos el lado CD y su correspondiente lado en la otra figura, ¿cómo son, entre sí, las rectas que se obtienen? _____

Consideremos lo siguiente

Una figura es una traslación de otra si los segmentos que unen dos puntos de la figura con sus correspondientes puntos en la otra, tienen la misma medida y son paralelos entre sí o son la misma recta. Al prolongar dos lados correspondientes en las figuras se obtiene la misma recta o se obtienen rectas paralelas entre sí.



3. Con tu juego de geometría, dibuja una traslación de la siguiente figura, el vértice A' debe ser el correspondiente al vértice A. Escribe el procedimiento que seguiste para trazarla.



Recuerden que:

Al trasladar una figura se conserva la medida de los lados y de los ángulos de la figura original.

Rotaciones

Consideremos lo siguiente

Cuando giramos una figura sobre un punto estamos haciendo una *rotación*, a ese punto se llama *centro de rotación*. La medida de cuánto giramos es el *ángulo de rotación*. Si el giro se hace en sentido contrario al de las manecillas del reloj, *el ángulo es positivo*, y si se hace en el sentido de las manecillas del reloj, *el ángulo es negativo*.

Manos a la obra

1. En la siguiente llanta hay una figura dibujada.

Al girar la llanta en sentido contrario al de las manecillas del reloj, la figura se va a mover. Traza sobre la llanta la nueva posición de la figura al hacer un giro de 80°.

¿La figura que dibujaste es una traslación de la figura original? _____

Explica ¿por qué? _____

¿De cuántos grados debe ser el giro para que la figura vuelva a estar en la misma posición? _____

2. Al girar la llanta la figura quedó en la siguiente posición.

Escoge dos vértices, A y B, en una de las figuras. Encuentra los vértices correspondientes, A' y B', en la otra figura. El centro de la llanta nómbralo como punto C.

Usa tu regla para unir A con A' y B con B', al hacerlo obtienes los segmentos AA ' y BB'.

Responde las preguntas.
Encuentra las mediatrices de los segmentos AA' y BB'. Prolóngalas hasta que se crucen.

¿En dónde se cruzan? _____

Mide el ángulo ∠ ACA' y el ángulo ∠ BCB'. ¿Son iguales o son distintos? _____
_____

¿Cuánto mide el ángulo del giro que se realizó? _____

Los segmentos AC y A'C. ¿Miden lo mismo o distinto? _____

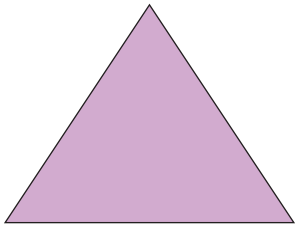
Los segmentos BC y B'C. ¿Miden lo mismo o distinto? _____

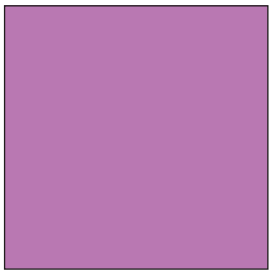
Los lados correspondientes y los ángulos correspondientes en las figuras, ¿son iguales o son distintos? _____

A lo que llegamos

Al hacer una rotación con un ángulo de rotación de 360°, volvemos a la posición de la figura original.
Cuando una figura se obtiene rotando otra, los vértices correspondientes equidistan del centro de rotación y se conserva la medida de los lados y de los ángulos de la figura original.

3. Copia las siguientes figuras en una hoja, recórtalas y utiliza un lápiz o una pluma para fijar el centro de rotación dentro de la figura. Encuentra el centro de rotación de manera que se vuelva a la posición inicial al rotar la figura con un ángulo de rotación que mida entre –360° y 360°. Para cada figura indica la medida de todos los ángulos de rotación positivos y negativos con los que se vuelve a la posición inicial.





A lo que llegamos

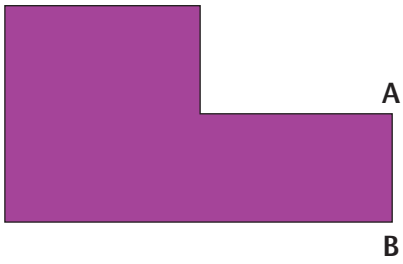
Para rotar un polígono con respecto a un punto C y con un ángulo de rotación *r*:

1. Por cada vértice se traza la recta que une el vértice con el punto C.
2. Utilizando la recta que trazaste, se traza un ángulo igual al ángulo *r*. La recta debe ser uno de los lados del ángulo y el punto C, el vértice del ángulo. Si el ángulo es positivo se traza el lado que falta en sentido contrario a las manecillas del reloj, si el ángulo es negativo se traza en el sentido de las manecillas del reloj.
3. Sobre el nuevo lado del ángulo se traslada la distancia entre el vértice del polígono y el punto C.
4. Se unen los vértices encontrados para formar el polígono rotado.

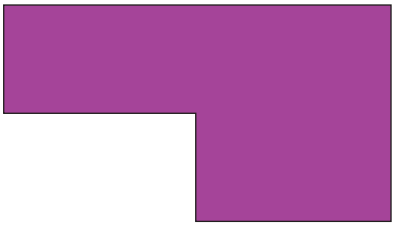
Simetría central

Manos a la obra

1. Las siguientes figuras se obtuvieron al rotar la figura de la izquierda con un ángulo de rotación de 180° y centro en C. Encuentra los vértices correspondientes a los vértices A y B, nómbralos A' y B'. Une A con A' y B con B'.



C



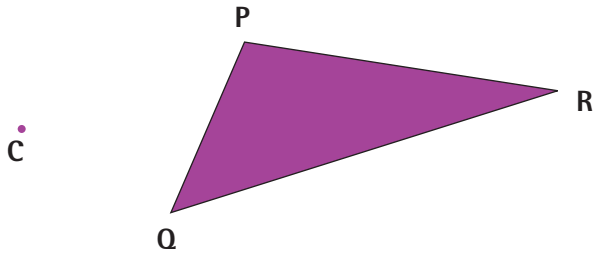
Responde las preguntas.
¿Por dónde pasa el segmento AA'? _____
¿Cuál es la distancia entre A y C? _____
¿Cuál es la distancia entre A' y C? _____
¿Por dónde pasa el segmento BB'? _____
¿Cuál es la distancia entre B y C? _____
¿Cuál es la distancia entre B' y C? _____
Escoge otro vértice y su correspondiente vértice en la otra figura. Únelos y escribe en el dibujo la distancia de cada uno de los dos vértices al centro.
Los lados correspondientes y los ángulos correspondientes en las figuras, ¿son iguales o son distintos? _____

A lo que llegamos

A una rotación sobre un centro C con un ángulo de 180°, se le llama una *simetría central* o *simetría con respecto al punto C*. Cuando dos puntos A y A' son simétricos con respecto al punto C, A y A' equidistan de C y los tres puntos son colineales.

A C A'

Traza el simétrico del triángulo PQR con respecto al punto C.
Escoge un punto en el triángulo PQR, que no sea uno de sus vértices, y localiza su simétrico con respecto al punto C.



A lo que llegamos

Para construir un polígono simétrico a otro con respecto a un punto:

1. Por cada vértice se traza la recta que pasa por el centro de simetría.
2. Sobre cada recta que se trazó se toma la distancia de cada vértice al centro de simetría y se traslada esa misma distancia del otro lado de la recta
3. Se unen los vértices encontrados para formar el polígono.

Es decir, se traza el simétrico de cada vértice con respecto al centro de simetría y se unen todos los vértices simétricos.

Una figura simétrica a otra con respecto a un punto conserva la medida de los lados y de los ángulos de la figura original.

Sesión 19.

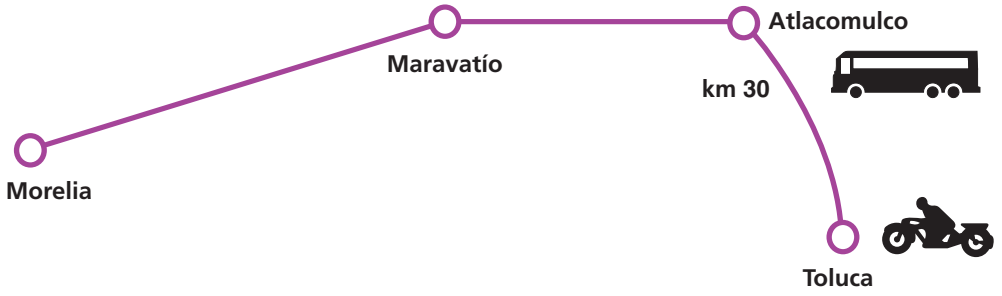
Representación gráfica de sistemas de ecuaciones

Propósito

Representarás gráficamente un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes enteros e interpretarás la intersección de sus gráficas como la solución del sistema.

Para empezar

Don Matías va de Toluca a Morelia para asistir a la feria ganadera que se celebrará en la capital del estado de Michoacán. Va en un camión de pasajeros que viaja a velocidad constante de 60 km/h.
A don Matías se le olvidaron unos documentos para la compra de vacas. Uno de sus trabajadores va a intentar alcanzarlo en motocicleta, sale cuando don Matías ya va en el kilómetro 30 de la carretera. La motocicleta viaja a 80 km/h.



Manos a la obra

Para resolver este problema. Usa las letras *d* y *t* para representar:
d: la distancia recorrida en kilómetros,
t: el tiempo en horas,

Contesta las siguientes preguntas para encontrar las expresiones algebraicas que permiten encontrar la distancia recorrida *d* a partir del tiempo *t*, tanto para el camión como para la motocicleta.
La motocicleta va a 80 km/h, ¿cuántos kilómetros recorrió en *una hora*? _____

¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en *2 horas*? _____

¿Cuántos kilómetros recorrerá en *t horas*? _____

Cuando la motocicleta salió de Toluca el camión ya había recorrido *30 km*, ¿En qué kilómetro estaba el camión *una hora* después de que salió el motociclista? _____

¿En qué kilómetro estaba el camión *2 horas* después de que salió el motociclista? _____

¿En qué kilómetro estaba *t, horas* después de que salió el motociclista? _____

¿Por qué la expresión $d = 60t$, no permite encontrar la distancia d recorrida por el camión después de t horas de que la motocicleta salió de Toluca? _____
_____

Ahora grafica las expresiones algebraicas que encontraste.
Completa las siguientes tablas usando las expresiones de la distancia d y el tiempo t para el camión y la motocicleta.

Camión

Expresión: $d =$ _____

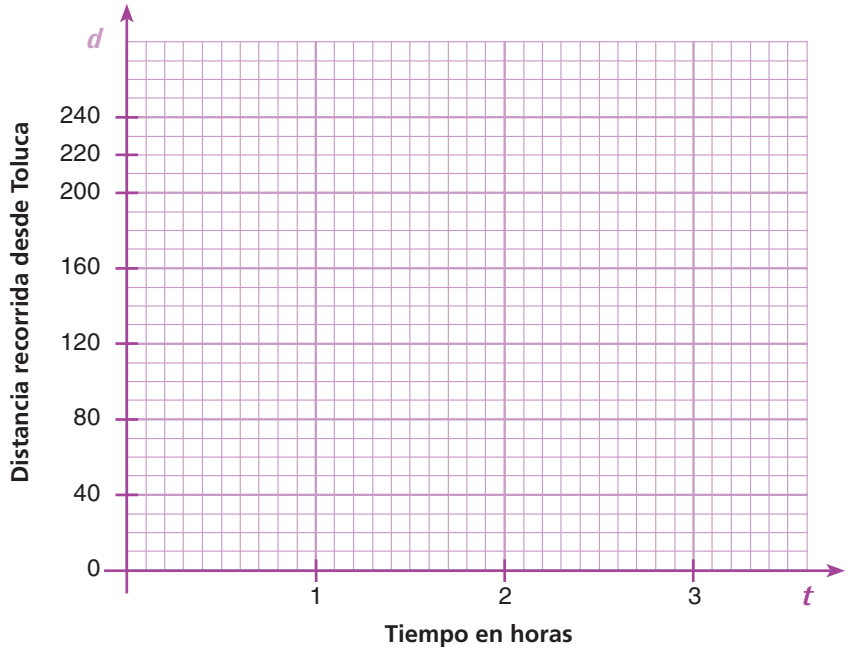
t	d	Punto (t, d)
0	30	(0,30)
1		
2		
$2\frac{1}{2}$		

Motocicleta

Expresión: $d =$ _____

t	d	Punto (t, d)
0	0	(0,0)
	80	
2		
$2\frac{3}{4}$		

En el plano cartesiano grafica las expresiones para el camión y la motocicleta.



¿Aproximadamente en qué kilómetro de la carretera Toluca-Morelia el motociclista alcanzará a don Matías? _____

¿Aproximadamente en cuánto tiempo lo alcanzará? _____

Recuerden que:

Para ubicar con precisión la distancia donde don Matías es alcanzado por el motociclista, es recomendable resolver el sistema de ecuaciones mediante algún método algebraico.

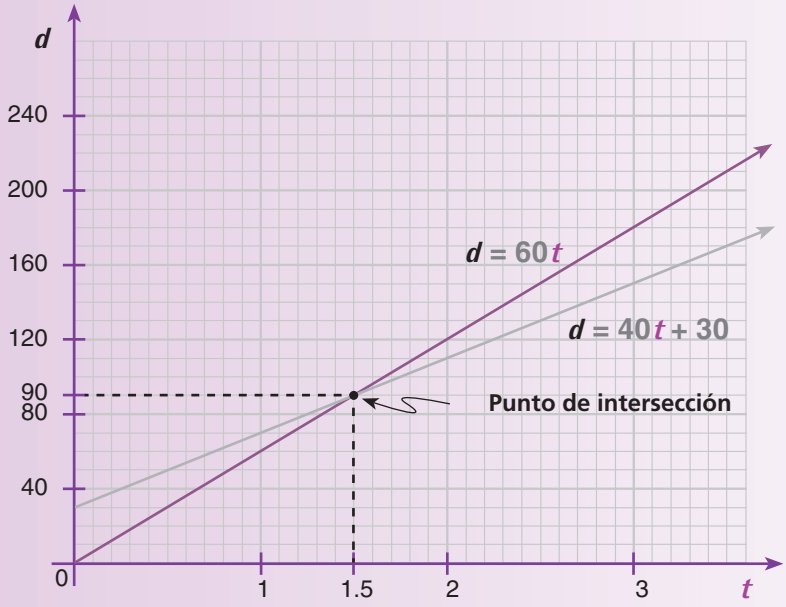
Aplica un método algebraico y resuelve el sistema.
¿Cuál es el valor de la incógnita t? $t =$ _____
¿Cuál es el valor de la incógnita d? $d =$ _____
¿En qué tiempo alcanzará el motociclista a don Matías?
¿En qué kilómetro de la carretera Toluca-Morelia el motociclista alcanzará a don Matías?
¿Los valores de d y t obtenidos mediante el método algebraico son iguales o próximos a los estimados mediante la representación gráfica de las ecuaciones?

A lo que llegamos

La *representación gráfica* de un sistema de ecuaciones permite encontrar la solución del sistema al encontrar las coordenadas del *punto de intersección* de las rectas correspondientes a las ecuaciones.
Por ejemplo, el sistema de ecuaciones:

$$d = 60t$$
$$d = 40t + 30$$

Tiene la siguiente representación gráfica:



Para encontrar con precisión la solución se puede usar un *método algebraico*.

¿Dónde está la solución?

Consideremos lo siguiente

Dado un sistema de ecuaciones puede tener o no solución.

- *Tiene solución* cuando las rectas asociadas a las ecuaciones del sistema se *intersecan*. El punto de intersección es la solución del sistema.
- *No tiene solución* cuando las rectas asociadas a las ecuaciones del sistema no se intersecan, es decir, cuando son *rectas paralelas*.

Manos a la obra

Resuelve el siguiente problema:

Encontrar dos números tales que 3 veces el segundo menos 6 veces el primero, den 9 como resultado; y que, al mismo tiempo, 12 veces el primero menos 6 veces el segundo, den 18 como resultado.

Si se usa la letra x para representar al primer número y la letra y para representar al segundo número, ¿cuál de las siguientes parejas de ecuaciones corresponde al problema? Subráyenla.

Ecuación 1: $3x - 6y = 9$ Ecuación 1: $3xy = 9$ Ecuación 1: $3y - 6x = 9$
Ecuación 2: $12x - 6y = 18$ Ecuación 2: $6xy = 18$ Ecuación 2: $12x - 6y = 18$

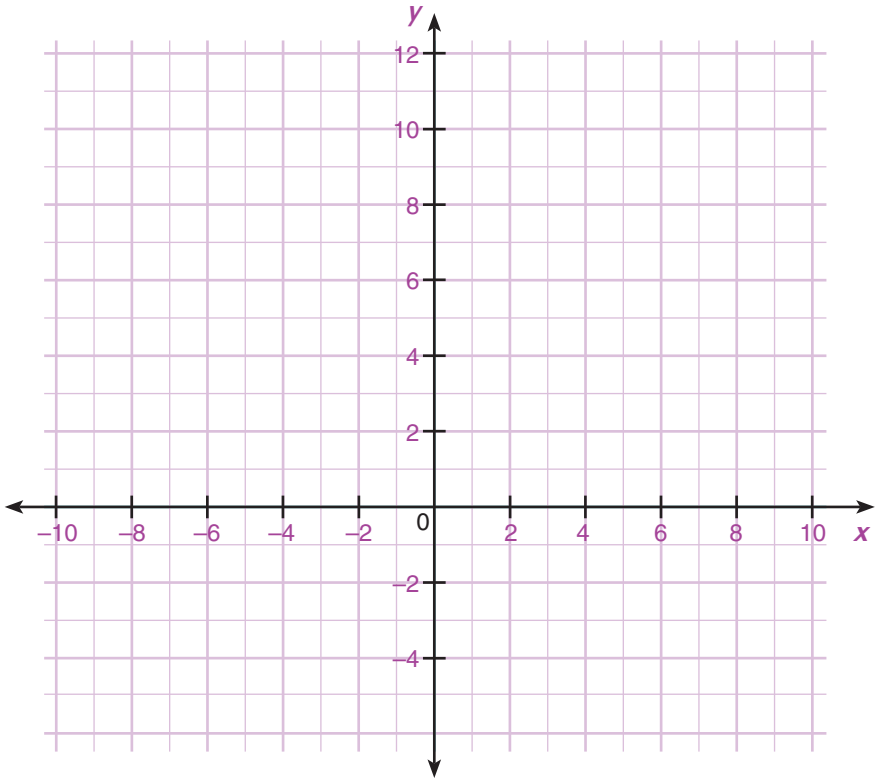
Completa la tabla para encontrar algunas parejas de números que cumplan con las ecuaciones que escogiste y grafica los puntos que obtengas.

Recta 1: _____

x	y	Punto (x, y)
–1		
0		
1		
4		

Recta 2: _____

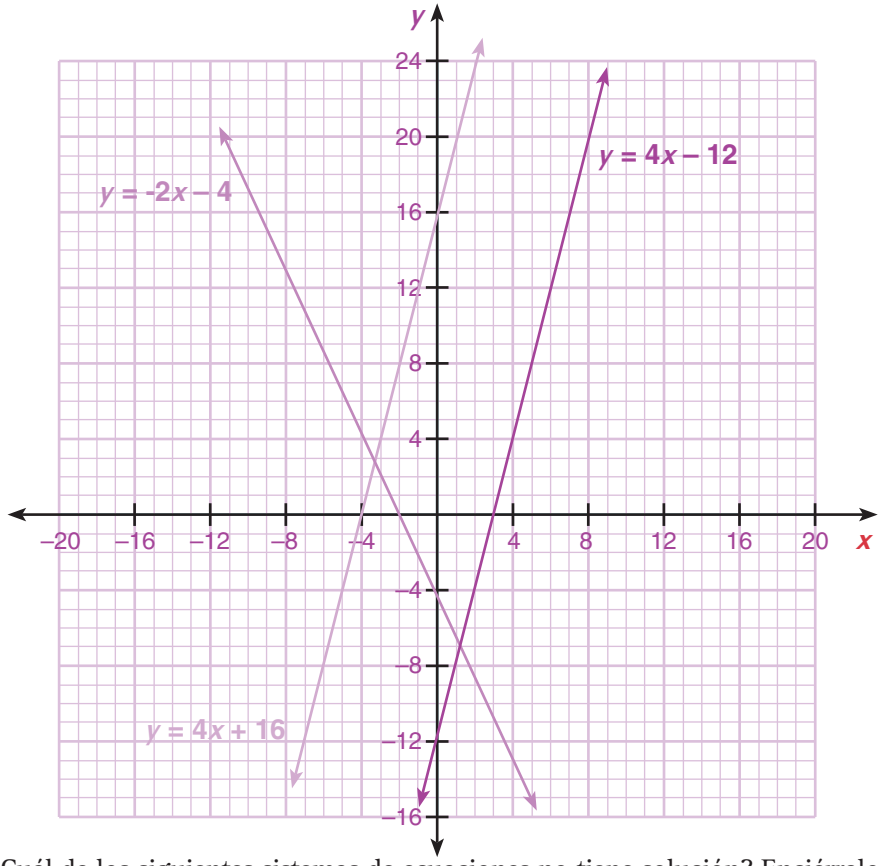
x	y	Punto (x, y)
–1		
0		
1		
4		



Contesta las preguntas.
¿Cuánto es la *ordenada al origen* de la recta 1? _____
¿Cuánto es la *ordenada al origen* de la recta 2? _____
¿Cuánto mide el *ángulo de inclinación* de la recta 1? _____
¿Cuánto mide el *ángulo de inclinación* de la recta 2? _____
¿Existirá algún punto común a las dos rectas? ¿Cuál? _____
¿Tiene solución el sistema? _____ ¿por qué? _____

Soluciones múltiples

En un sistema de ecuaciones, cuando la recta que *corresponde a una ecuación, es la misma que la recta que corresponde a la otra ecuación*, entonces *cualquier punto* que pertenezca a las rectas es solución del sistema.
Observa la siguiente gráfica y de acuerdo con ello contesta las preguntas.



¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones no tiene solución? Enciérralo en una curva.

E1: $y = -2x - 4$	E1: $y = -2x - 4$	E1: $y = 4x - 12$
E2: $y = 4x + 16$	E2: $y = 4x - 12$	E2: $y = 4x + 16$

De los tres sistemas de ecuaciones anteriores escribe el que tiene la solución

$$x = \frac{4}{3} \qquad y = -\frac{20}{3}$$

Ecuación 1: _____
Ecuación 2:_____

Encuentra la solución del sistema:

Ecuación 1: $y = -2x - 4$
Ecuación 2: $y = 4x + 16$

x = _____, y = _____

Sesión 20

Eventos mutuamente excluyentes

Propósito

Distinguirás en diversas situaciones de azar eventos que son mutuamente excluyentes. Determinarás la forma en que se puede calcular la probabilidad de ocurrencia.

Para empezar

Hoy veremos algunas situaciones para distinguir cuándo dos eventos son mutuamente excluyentes.

Manos a la obra

Material

Dos bolsas de plástico oscuras.
Una hoja blanca.

Procedimiento

1. En parejas corten la hoja en 12 partes iguales; numeren los papelitos del 1 al 6, de modo que haya dos papelitos con el número 1, dos con el 2, etc. Coloquen en una bolsa un juego de papelitos numerados del 1 al 6 y en la otra los otros 6 papelitos. Marquen una de las bolsas con el número I y la otra con el II.

Ahora, el experimento que van a realizar consiste en sacar dos papelitos al azar, uno de cada bolsa, y luego los regresan a las bolsas que les corresponden.

Tres eventos que pueden ocurrir al realizar un experimento de sacar dos papelitos al azar, uno de cada bolsa. Anoten los números que salen y regrésenlos a las bolsas:

A: "Los dos papelitos muestran el mismo número".
B: "La suma de los números de los dos papelitos es 7".
C: "La suma de los números de los dos papelitos es 10".

Contesten lo que se les pide.
Si sacan de la bolsa I el papelito que tiene el número 4, y de la bolsa II el papelito con el número 3, es decir, sacan 4 y 3, ¿a cuál de los tres eventos es favorable este resultado? _____

¿Cuál es un resultado favorable al evento C? _____

Si ocurre que la suma de los números en los dos papelitos es 7, ¿es posible que la suma de esos números también sea 10? _____

Si es así, escriban un ejemplo. _____
_____

Si ocurre que los dos papelitos muestran el mismo número, ¿puede ocurrir, al mismo tiempo, que la suma de los números de los dos papelitos sea 10? _____

Si es así, escriban un ejemplo _____

Si ocurre que los dos papelitos muestran el mismo número, ¿puede ocurrir que la suma de esos números sea 7? _____Si es así, escriban un ejemplo.

Recuerden que:

Un *experimento aleatorio* es todo proceso que produce un resultado u observación que depende del azar. Al conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio lo llamamos *espacio muestral*, *espacio de eventos* o *conjunto de resultados*. Por ejemplo, al realizar el experimento de lanzar un dado (no trucado), obtenemos el siguiente: {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Como es un conjunto, podemos formar subconjuntos de él que llamamos *eventos*. Por ejemplo, el evento A es obtener un número par al lanzar un dado; los resultados favorables son: {2, 4, 6}.

Para empezar

Cálculo de la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes y no excluyentes

La tabla muestra el número de personas que laboran en una fábrica. Completa la tabla.

	Tiempo completo	Medio tiempo	Total por sexo
Mujeres	60	20	
Hombres	80	40	
Total por turno			

Utiliza la tabla anterior para contestar las siguientes preguntas:

Recuerden que:

Dos eventos son mutuamente excluyentes significa que si ocurre uno no puede ocurrir el otro y no tienen resultados favorables en común.

¿Cuántas personas trabajan tiempo completo? _____
¿Y cuántas personas trabajan medio tiempo? _____
¿Cuántos trabajadores son mujeres? _____
¿Cuántas personas trabajan medio tiempo y son mujeres? _____
En la tabla, ¿qué representa el número 40? _____
En total, ¿cuántos trabajadores hay en la fábrica? _____

¿Cuál o cuáles de las siguientes parejas de eventos son mutuamente excluyentes? Márquenlas con una X.

☐ Se selecciona a un trabajador al azar de la fábrica: "La persona seleccionada trabaja tiempo completo" o "El trabajador seleccionado es mujer".

☐ Se selecciona a un trabajador al azar de la fábrica: "La persona seleccionada trabaja tiempo completo" o "El trabajador seleccionado trabaja medio tiempo y es mujer".

☐ Se selecciona a un trabajador al azar de la fábrica: "La persona seleccionada es hombre" o "El trabajador seleccionado trabaja medio tiempo y es mujer".

Completa el siguiente arreglo rectangular con las probabilidades que corresponden a cada evento, observa los ejemplos:

	Tiempo completo	Medio tiempo	Total por sexo
Mujeres		$\frac{20}{200} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$	
Hombres	$\frac{80}{200} =$		
Total por turno			$\frac{200}{200}=1$

Si se selecciona al azar a un trabajador, ¿cuál es la probabilidad de que trabaje tiempo completo? P(trabaja tiempo completo) = P(A) =

¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento C? P(trabaja medio tiempo y es mujer) = P (C)=

Si se selecciona al azar a un trabajador, ¿cuál es la probabilidad de que trabaje tiempo completo y trabaje medio tiempo y sea mujer, es decir, ocurren los eventos (A y C)? P(trabaja tiempo completo y trabaja medio tiempo y es mujer) = P(A y C) =

¿Cuál es la probabilidad de que el trabajador seleccionado al azar trabaje tiempo completo o medio tiempo y sea mujer? (No consideres el número de trabajadores que cumple con ambos eventos a la vez.)

P(trabaja tiempo completo o medio tiempo y es mujer) = _____

A lo que llegamos

Cuando dos eventos son definidos en un espacio muestral y *son mutuamente excluyentes*, la probabilidad de que ocurra uno u otro de los eventos se obtiene sumando las probabilidades de cada evento. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

Cuando dos eventos *no son mutuamente excluyentes*, la probabilidad de que ocurra uno u otro se obtiene sumando las probabilidades de cada evento menos la probabilidad de que ocurran al mismo tiempo.
Lo cual se expresa de la siguiente manera:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

Esta regla recibe el nombre de *regla de la suma o de la adición*.
El caso especial de esta regla es cuando los eventos son mutuamente excluyentes porque entre los eventos no hay resultados favorables que se "compartan" por lo que no hay doble cuenta de resultados.